

Ministerul Educației al Republicii Moldova  
Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți  
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului  
Catedra de matematică și informatică

Curriculum pentru unitatea de curs  
„Algebra și teoria numerelor”

Studii cu frecvență la zi

Bălți, 2015

Curriculum-ul la unitatea de curs *Algebra și teoria numerelor* a fost discutat la ședința Catedrei de matematică și informatică, Procesul verbal nr.8 din 9 aprilie 2015

Șeful Catedrei \_\_\_\_\_ conf. univ., dr., Eugeniu Plohotniuc

Curriculum-ul la unitatea de curs *Algebra și teoria numerelor* a fost aprobat la ședința Consiliului Facultății de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Procesul verbal nr. 13 din 23 aprilie 2015

Decanul Facultății \_\_\_\_\_ prof. univ., dr. hab., Pavel Topală

## Informații de identificare a cursului

**Facultatea:** Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului

**Catedra:** matematică și informatică

**Domeniul general de studiu:** 14 Științe ale Educației

**Domeniul de formare profesională:** 141 Educație și formarea profesorilor

**Denumirea specialității:** 141.01 Matematică și 141.02 Informatică, ciclul I, studii superioare de licență

### Administrarea unității de curs

Codul unității de curs	Credite ECTS	Total ore	Repartizarea orelor				Forma de evaluare	Limba de predare
			Prel.	Sem.	Lab.	I. ind.		
S1.02.O.015	6	180	60	45	-	75	Examen scris	română

**Statul:** de specializare, obligatorie

### Informații referitoare la cadrul didactic

Titularul cursului - Popovici Tatiana, lector universitar. Absolventă a Universității de Stat „Alecu Russo” din Bălți, specializarea „Matematică și Informatică”. A realizat o serie de lucrări științifice în domeniul Logica matematică, Algebră, Teoria numerelor, Combinatorică.

*Biroul:* aula 208.

*Telefon:* 0231 52 337.

*E-mail:* tanea-popovici@mail.ru, tanea-popovich@mail.ru

*Orele de consultații:* miercuri, 14<sup>10</sup> – 15<sup>30</sup>. Consultațiile se oferă atât în regim „față-în-față”, cât și prin poșta electronică sau Skype. Nume în Skype: popovici\_tatiana

## Integrarea cursului în programul de studii

Unitatea de curs *Algebra și teoria numerelor* este predată în semestrul II și reprezintă o unitate de curs de orientare spre specialitatea de bază pentru studenții specializării Matematică și Informatică.

Conform Curriculum-ului național la matematică pentru ciclul gimnazial, elementele de teorie a numerelor și anume: numere întregi, factor comun, divizor, multiplu, criterii de divizibilitate, numere prime și numere compuse, c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere, rezolvarea ecuațiilor diofantice liniare (ecuații pe mulțimea  $\mathbb{Z}$ ) reprezintă noțiuni fundamentale ale cursului gimnazial de matematică ce se studiază în clasele a V-a și a VI-a. Astfel, studiul acestei unități de curs este utilă studenților specializării Matematică și Informatică în cariera de profesor de matematică.

Scopurile și conținuturile disciplinei sunt corelate cu scopurile și conținuturile disciplinelor de specializare, precum S1.O3.A.024 Aritmetica și trigonometria, S1.O3.A.025 Metode nestandard de rezolvare a problemelor de matematică, F.O5. O.043 Didactica matematicii, S1.O7.L. 074 Rezolvarea problemelor de olimpiadă la matematică, M.07.A.073 Structuri algebrice.

Ținând cont de numeroasele aplicații ale congruențelor în teoria codurilor, securitatea informației, planificarea experimentelor, metodele și tehnicile de rezolvare a problemelor ce țin de Algebra și teoria numerelor vor fi utile într-o eventuală carieră de cercetător.

### Competențe prealabile

#### 1. *Competențe cognitive:*

- de explicare a conceptelor de bază ale teoriei divizibilității studiate în cursul preuniversitar de matematică;
- de recunoaștere a criteriilor de divizibilitate cu 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.
- de cunoaștere a operațiilor aritmetice și a proprietăților acestora pe mulțimea numerelor întregi;
- de descriere a metodei descompunerii în factori, utilizată la rezolvarea ecuațiilor de grad superior;
- de cunoaștere a noțiunii de derivată a funcției de o variabilă;
- de descriere a algoritmilor de rezolvare a ecuațiilor liniare și pătrate;
- de descriere a metodei substituției de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare;
- de descriere a metodei inducției matematice;

#### 2. *Competențe de aplicare:*

- de stabilire a proprietăților diferitor numere în baza criteriilor de divizibilitate studiate;
- de descompunere a numerelor naturale în factori primi;

- de rezolvare a ecuațiilor și sistemelor de ecuații;
- de aplicare a teoremei fundamentale a aritmeticii la stabilirea relației dintre două numere naturale;
- de aplicare a metodei inducției matematice la rezolvarea diferitor tipuri de probleme;
- de aplicare a metodei descompunerii în factori la rezolvarea ecuațiilor de grad superior;
- de aplicare a formulelor calculului algebric în diverse contexte;
- de diferențiere a funcției de o variabilă;
- de calcul a valorilor derivatelor de ordinul  $n$  într-un punct;
- de descompunere a funcției de o variabilă în serie Taylor.

## Competențe dezvoltate în cadrul cursului

### 1. *Competențe cognitive:*

- de explicare, exemplificare și operare cu conceptele de bază ale teoriei divizibilității;
- de descriere a metodelor de rezolvare a congruențelor liniare și pătrate, a sistemelor de congruențe liniare;
- de descriere a aplicațiilor congruențelor numerice în aritmetică;
- de explicare și exemplificare a proprietăților congruențelor numerice, liniare, pătrate, a sistemelor de congruențe liniare, a numerelor algebrice și transcendente;
- de descriere a algoritmilor de bază de determinare a celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun a  $n$  numere naturale;
- de formulare a teoremelor fundamentale ale cursului;
- de descriere a metodelor de rezolvare a ecuațiilor diofantice de o anumită formă;
- de explicare a metodei inducției matematice;
- de rezolvare a ecuațiilor diofantice de ordinul întâi și pătrate de o anumită formă;

### 2. *Competențe de aplicare:*

- de stabilire a relației de divizibilitate între două numere naturale;
- de demonstrare a relației de divizibilitate pentru numerele naturale de o anumită formă, utilizând inducția matematică;
- de utilizare a metodelor și tehnicilor de bază ale congruențelor numerice la rezolvarea diferitor probleme aritmetice;
- de calcul a valorilor funcțiilor numerice  $\tau(a)$ ,  $S(a)$ ,  $[a]$ ,  $\{a\}$ ,  $\varphi(a)$ ;

- de identificare a problemelor ce pot fi soluționate prin intermediul metodelor Teoriei numerelor;
- de calcul a c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a  $n$  numere naturale;
- de descompunere a numerelor naturale în factori primi;
- de utilizare a descompunerilor canonice ale numerelor compuse în diverse contexte;
- de descompunere a numerelor algebrice și transcendente în fracții continue;
- de demonstrare a criteriilor de divizibilitate, utilizând congruențele numerice;
- de utilizare a proprietăților congruențelor numerice la stabilirea criteriilor de divizibilitate cu 7, 8, 11, 13, 37.

- de descompunere a fracțiilor ordinare în fracții continue finite;
- de descompunere a numerelor iraționale în fracții continue periodice;
- de calcul a valorilor numerelor iraționale cu aproximația dată, utilizând descompunerea numerelor în fracții continue;
- de aplicare a teoriei indicilor la rezolvarea congruențelor binome;
- de determinare a rădăcinilor primitive ale numerelor;

### *3. Competențe de analiză și predicție:*

- de elaborare a etapelor de rezolvare a problemelor de un anumit tip;
- de selectare a metodei eficiente de rezolvare a ecuațiilor diofantice, a congruențelor liniare, sistemelor de congruențe liniare, a congruențelor de grad superior;

## **Finalitățile cursului**

La finalizarea studierii unității de curs, studentul va fi capabil:

1. Să explice, utilizând exemple, conținuturile teoretice, metodele și tehnicile de bază ale unității de curs *Algebra și teoria numerelor*;
2. Să aplice diverse criterii de divizibilitate la rezolvarea problemelor din diverse ramuri ale matematicii;
3. Să selecteze metoda optimală de rezolvare a congruențelor liniare, de grad superior, a sistemelor de congruențe liniare;
4. Să aplice congruențele numerice la rezolvarea problemelor aritmetice;
5. Să soluționeze unele ecuații diofantice de o anumită formă;
6. Să aplice cunoștințele din Teoria numerelor la rezolvarea problemelor din diverse ramuri ale matematicii.

## Conținuturi

Nr. d/o	Denumirea și conținutul scurt al temei	Prel. (ore)	Sem. (ore)	Ind. (ore)
<b>Unitatea de conținut I. Mulțimea numerelor naturale.</b>				
<b>Numere prime și numere compuse</b>				
1.	Obiectul de studiu al teoriei numerelor. Legice ordonării mulțimii numerelor naturale. Operații asupra numerelor naturale. Proprietăți.	1	-	2
2.	Divizibilitatea numerelor întregi. Proprietăți.	1	1	2
3.	Inducția matematică. Utilizarea inducției matematice la demonstrarea relațiilor de divizibilitate.	1	1	3
4.	c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două numere naturale. Proprietăți.	1	1	2
5.	Algoritmul lui Euclid de determinare a c.m.m.d.c. a două numere naturale.	1	1	1
6.	Numere prime și numere compuse. Proprietăți. Criteriul lui Euler de determinare a numerelor prime.	2	1	2
7.	Descompunerea numerelor naturale în factori primi. Forma canonică a descompunerii. Aplicații.	2	1	2
8.	Infinitatea mulțimii numerelor prime. Repartizarea șirului numerelor prime în mulțimea numerelor naturale.	1		1
	Test de evaluare curentă Nr. 1	2		
	<b>Total unitate de conținut I</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>15</b>
<b>Unitatea de conținut II. Funcții numerice. Frații continue</b>				
9.	Funcții numerice multiplicative. Funcția $\tau(a)$ și $S(a)$	2	1	3
10	Funcția partea întreagă $[x]$ și partea fracționară $\{x\}$ a unui număr. Descopunerea numărului $n!$ în factori primi.	1	1	3
11.	Frații continue finite. Redusele fracțiilor continue finite. Proprietăți.	1	2	2
12.	Frații continue infinite. Descompunerea numerelor reale în fracții continue. Aproximarea numerelor reale cu numere raționale.	2	2	4

Nr. d/o	Denumirea și conținutul scurt al temei	Prel. (ore)	Sem. (ore)	Ind. (ore)
	Test de evaluare Nr. 2		2	
	<b>Total unitate conținut II</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>12</b>
<b>Unitatea de conținut III. Congruențe numerice</b>				
13.	Clase de resturi după modulul $n$ . Operații asupra claselor de resturi. Proprietăți.	1	1	2
14.	Congruențe numerice. Proprietăți. Aplicații.	3	1	4
15.	Teorema mică a lui Fermat. Aplicații.	1	1	3
16.	Indicatorul lui Euler. Teorema lui Euler. Aplicații.	1	2	3
	Test de evaluare Nr. 3	2		
	<b>Total unitate conținut III</b>	<b>8</b>	<b>5</b>	<b>12</b>
<b>Unitatea de conținut IV. Congruențe liniare și sisteme de congruențe liniare</b>				
17.	Noțiune de congruență liniară. Proprietăți. Metode de rezolvare a congruențelor liniare.	4	4	6
18.	Sisteme de congruențe liniare cu o necunoscută.	2	2	4
	<i>Evaluare sumativă Nr. 4</i>		2	
	<b>Total unitate de conținut IV</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>
<b>Unitatea de conținut V. Congruențe de grad superior</b>				
19.	Noțiune de congruență de grad superior. Echivalența congruențelor de grad superior.	2	-	1
20.	Reducerea congruențelor de grad superior în raport cu un modul compus la sistem de congruențe în raport cu module reciproc prime două câte două.	2	1	2
22.	Congruențe pătrate. Rezolvarea congruențelor pătrate de forma $x^2 \equiv a \pmod{m}$ .	1	1	1
23.	Congruențe pătrate. Rezolvarea congruențelor pătrate de forma $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}$ .	1	1	2
24.	Simbolul lui Legendre. Proprietăți.	1	-	1
25.	Simbolul lui Jacobi. Proprietăți.	1	-	1



Nr. d/o	Denumirea și conținutul scurt al temei	Prel. (ore)	Sem. (ore)	Ind. (ore)
26.	Aplicarea simbolului lui Legendre și a simbolului lui Jacobi la rezolvarea congruențelor pătrate.	2	2	4
27.	Resturi de puteri.	1	1	-
28.	Rădăcini primitive ale modulului prim $p$ și ale modulului $p^\alpha$ .	1	1	2
29.	Indici. Proprietăți.	1	-	2
30.	Utilizarea indicilor la rezolvarea congruențelor binome.	1	1	2
31.	Numere algebrice. Proprietăți.	2	1	1
32.	Numere transcendente. Existența și construirea numerelor transcendente.	2	1	2
	Test de evaluare Nr.5	2		
	<b>Total unitate de conținut V</b>	<b>20</b>	<b>10</b>	<b>21</b>
<b>Unitatea de conținut VI. Ecuatii diofantice</b>				
33.	Ecuatii diofantice liniare.	1	1	2
34.	Utilizarea congruențelor liniare la rezolvarea ecuațiilor diofantice de forma $ax + by + c = 0$	1	1	2
35.	Ecuatii diofantice de grad superior de o variabilă.	1	-	2
36.	Ecuatii diofantice pătrate cu două variabile.	2	2	3
37.	Ecuatii diofantice cu $n$ variabile.	1	1	2
38.	Ecuatia lui Pel.	1	-	2
39.	Ecuatia lui Fermat. (Marea teoremă a lui Fermat)	1	1	2
	Test de evaluare curentă Nr. 6		2	
	<b>Total unitate de conținut VI</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>15</b>
	<b>Total unitate de curs</b>	<b>60</b>	<b>45</b>	<b>75</b>

## Activități de lucru individual

În cadrul studierii acestei unități de curs, studenților li se va propune o serie de teme și probleme ce urmează a fi studiate și rezolvate independent. Însărcinările pentru lucrul individual vor fi propuse la sfârșitul fiecărei teme teoretice și al fiecărui seminar. Sudentul trebuie să rezolve probleme propuse într-un caiet separat și este obligat să prezinte periodic caietul profesorului pentru verificare.

La fel, studentul este în drept să selecteze probleme independent, din diferite surse (indicate sau la liberă alegere, cu indicarea sursei respective) și de diferită complexitate.

Activitatea individuală este apreciată la finele cursului, în dependență de disciplina studentului (prezentarea lucrului independent în termenul indicat), gradul de dificultate al problemelor rezolvate.

## Evaluare

Evaluarea sumativă se realizează la finele fiecărei unități de conținut. Sunt planificate 6 teste de evaluare curentă, ce conțin atât întrebări teoretice, cât și practice.

Nota reușitei curente va fi calculată ca media aritmetică a notelor acumulate în cadrul evaluării sumative și a activității individuale.

Evaluarea finală se promovează sub formă de test scris ce conține întrebări teoretice și practice. Timp de promovarea a examenului - 2 ore.

Chestionarul pentru examen conține doar temele enumerate în conținuturi.

Nota finală a cursului se va determina conform relației

$$NF = 0.6NC + 0.4NE,$$

unde  $NE$  este nota de la evaluarea curentă, iar  $NE$  este nota de la evaluarea finală.

Mostră de test de evaluare curentă

Item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	total
Puncte acordate	1	4	6	5	4+2+2	5	3+4+5	4	5	50
Puncte acumulate										

- Definiți funcția  $[x]$ .
- Explicați algoritmul de descompunere a fracțiilor ordinare în fracții continue.
- Formulați proprietățile reduselor fracțiilor continue.
- Uniți în perechi numerele și partea întreagă a acestora

-3,2	5
$2 - \sqrt{5}$	-4
5,1	-3
$\pi$	-1
$-e$	3
$\sqrt{2} + 1$	

- Fie date numerele  $N_1 = 116424$  și  $N_2 = 24984$ .
  - Determinați forma canonică a numerelor  $N_1$  și  $N_2$ .
  - Calculați numărul divizorilor fiecărui număr.
  - Calculați suma divizorilor fiecărui număr.
- Determinați exponentul numărului 11 în descompunerea canonică a numărului  $537!$ .
- Descompuneți numerele în fracții continue
  - $\frac{49}{13}$ ;
  - $\frac{137}{29}$ ;
  - $\sqrt{2}$ .
- Determinați fracția ordinară ce corespunde fracției continue  $[3, 1, 2, 4, 5, 4]$ .
- Utilizând redusele fracțiilor continue, calculați  $2 + \sqrt{3}$  cu aproximația de  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

## Resurse informaționale ale cursului

### Lista bibliografică obligatorie:

1. VOLCOV, N. F. *Elemente de teorie a numerelor*. Chișinău, Ed. Școala Sovietică, 1958.
2. GUȚU, I. *Divizibilitatea în mulțimile  $N$  și  $Z$* . Chișinău, Ed. S.N., 2006.
3. ЛЯПИН, Е. С.; ВСЕЕВ, А. Е. *Алгебра и теория чисел*. М.: Просвящение, 1974.
4. КУЛИКОВ, Л.Я.; МОСКАЛЕНКО, А.И.; ФОМИН А.А. *Сборник задач по алгебре и теории чисел*. М.: Изд. Просвящение, 1993.
5. WISSAM, Raji. *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Acces liber la adresa web: <http://www.saylor.org/site/wp-content/uploads/2013/05/An-Introductory-in-Elementary-Number-Theory.pdf>

### Lista bibliografică opțională:

1. BOREVICI, Z. I.; ȘAFAREVICI, I. R. *Teoria numerelor*. București: Editura Științifică și Enciclopedică, 1985.
2. ОРЕ, Ойстин. *Приложение в теории чисел*. М: Изд. УРСС, 2003.
3. ГРИБАНОВ, В.У.; ТИТОВ, П.И. *Сборник упражнений по теории чисел*. М: Изд. Просвещение, 1964.
4. КОБЛИЦ, Н. *Курс теории чисел и криптографии*. М: Изд. ТВП, 2001.
5. STEIN, William. *Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets*. Acces liber la adresa web: <http://wstein.org/ent/ent.pdf>