



Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți
Catedra de matematică

CURS DE LECȚII LA
ANALIZA MATEMATICĂ I

Natalia Gașițoi

Bălți, 2011

Cuprins

Prefață	9
1 Introducere	11
1.1 Obiectul Analizei matematice. Mulțimi	11
1.1.1 Obiectul Analizei matematice	11
1.1.2 Simboluri logice. Mulțimi finite și infinite	11
1.1.3 Operații cu mulțimi	13
1.1.4 Relații binare. Relația de ordine. Relația de echivalență	15
1.2 Noțiune generală de funcție	16
1.2.1 Noțiune de funcție. Diferite moduri de definire a funcției. Graficul funcției	16
1.2.2 Clasificarea funcțiilor: surjecții, injecții, bijecții	18
1.2.3 Compunerea funcțiilor. Funcții inverse, parametrice și implicite	19
1.3 Noțiunile de grup, inel și corp	21
1.4 Mulțimea numerelor reale. Axiomatica mulțimii numerelor reale	22
1.4.1 Axiomele adunării, unele consecințe ale lor	23
1.4.2 Axiomele înmulțirii, unele consecințe ale lor	23
1.4.3 Axiomele de ordine	24
1.4.4 Axioma continuității	24
1.4.5 Dreapta reală	25
1.4.6 Noțiune de vecinătate a unui punct	26
1.4.7 Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$	28
1.5 Mulțimi mărginite și mulțimi nemărginite. Principiul segmentelor incluse	29
1.5.1 Element maxim și element minim al unei mulțimi. Mulțimi mărginite	29
1.5.2 Marginea superioară și marginea inferioară a unei mulțimi mărginite	29
1.5.3 Principiul segmentelor incluse (principiul Cauchy - Cantor)	30
2 Șiruri de numere reale	33
2.1 Șir numeric. Limita șirului numeric	33
2.1.1 Noțiune de șir numeric. Șiruri mărginite. Exemple	33
2.1.2 Noțiune de limită a șirului numeric	34
2.1.3 Unicitatea limitei șirului numeric	35

2.1.4	Mărginirea unui șir convergent	35
2.1.5	Teorema despre limita unui șir intermediar	36
2.1.6	Trecerea la limită în inegalități	36
2.2	Noțiune de subșir. Teorema Bolzano - Weierstrass	37
2.2.1	Noțiune de subșir. Limita subșirului unui șir convergent	37
2.2.2	Teorema Bolzano - Weierstrass despre extragerea unui subșir convergent dintr-un șir mărginit de numere reale	38
2.3	Operații cu șiruri convergente	39
2.3.1	Noțiune de șir infinit mic. Proprietățile șirurilor infinit mici	39
2.3.2	Noțiune de șir infinit mare	40
2.3.3	Condiția necesară și suficientă ca un număr să fie limita unui șir	41
2.3.4	Operații cu șiruri convergente	42
2.3.5	Nedeterminări	44
2.4	Șiruri monotone de numere reale. Convergența lor	45
2.4.1	Marginea superioară și marginea inferioară a unui șir. Șiruri monotone	45
2.4.2	Teorema despre existența limitei unui șir monoton	46
2.4.3	Numărul e	47
2.4.4	Limita superioară și limita inferioară a unui șir	48
2.5	Șiruri Cauchy	49
2.5.1	Noțiune de șir Cauchy. Mărginirea unui șir Cauchy	49
2.5.2	Criteriul lui Cauchy de convergență a șirurilor de numere reale	50
3	Limita și continuitatea funcției de o variabilă reală	51
3.1	Limita unei funcții într-un punct	51
3.1.1	Noțiune de punct de acumulare pentru o mulțime. Exemple	51
3.1.2	Definiția limitei funcției de o variabilă reală într-un punct în sensul lui Cauchy și în sensul lui Heine	52
3.1.3	Echivalența definițiilor limitei unei funcții într-un punct în sensul lui Cauchy și în sensul lui Heine	53
3.2	Proprietățile funcțiilor care au limită într-un punct	54
3.2.1	Unicitatea limitei funcției într-un punct	54
3.2.2	Limite laterale	55
3.2.3	Mărginirea și păstrarea semnului unei funcții care are limită într-un punct	56
3.2.4	Teorema despre trecerea la limită în inegalități	57
3.2.5	Teorema despre limita unei funcții intermediare	58
3.2.6	Teoremele despre limita sumei, produsului, câtului a două funcții care au limită într-un punct	58
3.3	Funcții infinit mici. Limita funcției compuse	59
3.3.1	Definiția funcției infinit mici într-un punct. Proprietățile funcțiilor infinit mici	59

3.3.2	Condiția necesară și suficientă ca un număr dat să fie limita unei funcții într-un punct	60
3.3.3	Teorema despre limita funcției compuse	60
3.3.4	Criteriul lui Cauchy de existență a limitei unei funcții într-un punct	61
3.4	Calculul limitelor funcțiilor	62
3.4.1	Calculul limitelor funcțiilor raționale întregi, funcțiilor fracționar-raționale, trigonometrice	62
3.4.2	Prima limită remarcabilă	64
3.4.3	Existența limitei unei funcții monotone	65
3.4.4	Formula fundamentală pentru numărul e	66
3.4.5	Unele consecințe din formula fundamentală pentru numărul e . . .	68
3.5	Studiul comportării locale a funcției	69
3.5.1	Relația „O”. Proprietățile relației „O”	69
3.5.2	Relația „o”. Proprietățile relației „o”	70
3.5.3	Funcții echivalente	71
3.5.4	Aplicarea relației de echivalență a funcțiilor la calculul limitelor de funcții	73
3.6	Funcții continue într-un punct	74
3.6.1	Noțiune de funcție continuă într-un punct. Operații aritmetice cu funcții continue. Continuitatea funcției compuse	74
3.6.2	Continuitatea unor funcții elementare	75
3.6.3	Puncte de discontinuitate. Clasificarea lor	76
3.7	Proprietățile funcțiilor continue pe un segment	77
3.7.1	Mărginirea funcției continue pe un segment	77
3.7.2	Atingerea marginii superioare exacte și marginii inferioare exacte .	78
3.7.3	Anularea funcției	80
3.7.4	Atingerea valorilor intermediare	81
3.7.5	Continuitatea uniformă a unei funcții continue pe un segment . . .	82
3.8	Continuitatea unor clase de funcții	83
3.8.1	Continuitatea funcțiilor monotone	83
3.8.2	Existența și continuitatea funcției inverse	84
4	Calculul diferențial al funcțiilor de o variabilă reală	87
4.1	Derivata funcției într-un punct	87
4.1.1	Unele probleme care au condus la noțiunea de derivată	87
4.1.2	Definiția derivatei funcției într-un punct. Derivate laterale	89
4.1.3	Continuitatea funcției derivabile	90
4.1.4	Exemple de calcul al derivatelor	91
4.1.5	Regulile de diferențiere de bază	93
4.2	Funcții diferențiabile. Diferențiala funcției	94

4.2.1	Noțiune de funcție diferențiabilă într-un punct. Condiția necesară și suficientă de diferențiabilitate a unei funcții într-un punct	94
4.2.2	Noțiune de diferențială. Aplicațiile diferențialei la calcule aproximative	96
4.3	Sensul geometric și sensul fizic al derivatei și diferențialei funcției de o variabilă reală	97
4.3.1	Sensul geometric al derivatei funcției de o variabilă reală. Ecuația tangentei la graficul funcției	97
4.3.2	Sensul geometric al diferențialei funcției de o variabilă reală	99
4.3.3	Sensul fizic al derivatei și diferențialei funcției de o variabilă reală	99
4.4	Derivata funcției inverse	99
4.4.1	Existența și calculul derivatei funcției inverse	99
4.4.2	Sensul geometric al derivatei funcției inverse	100
4.4.3	Calculul derivatelor funcțiilor trigonometrice inverse	101
4.5	Derivata și diferențiala funcției compuse	102
4.5.1	Existența și calculul derivatei funcției compuse	102
4.5.2	Diferențiala funcției compuse. Invarianța formei ei	103
4.5.3	Diferențierea logaritmică	104
4.5.4	Derivarea funcțiilor definite parametric	105
4.5.5	Derivarea funcțiilor definite implicit	105
4.6	Derivate și diferențiale de ordin superior	106
4.6.1	Definiția derivatelor de ordin superior	106
4.6.2	Derivatele de ordinul n ale sumei a două funcții și ale produsului a două funcții	107
4.6.3	Derivatele de ordin superior ale funcției compuse	108
4.6.4	Derivatele de ordin superior ale funcțiilor definite parametric	109
4.6.5	Derivatele de ordin superior ale funcției inverse	110
4.6.6	Diferențialele de ordin superior ale unei funcții. Nevalabilitatea invarianței formei diferențialei pentru diferențialele de ordin superior	110
5	Teoremele de bază ale calculului diferențial	113
5.1	Teoremele de medie	113
5.1.1	Teorema Fermat	113
5.1.2	Teorema Rolle	115
5.1.3	Teorema Lagrange	115
5.1.4	Teorema Cauchy	117
5.2	Ridicarea nedeterminărilor (regulile lui l'Hospital)	118
5.2.1	Ridicarea nedeterminărilor de forma $\frac{0}{0}$	118
5.2.2	Ridicarea nedeterminărilor de forma $\frac{\infty}{\infty}$	120
5.2.3	Ridicarea nedeterminărilor de formele $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$	121

5.3	Formula lui Taylor	121
5.3.1	Formula lui Taylor pentru un polinom	121
5.3.2	Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă reală	123
5.3.3	Forma lui Lagrange al restului lui Taylor	123
5.3.4	Forma lui Peano al restului lui Taylor	125
5.3.5	Formula lui Taylor pentru unele funcții elementare	126
5.4	Rolul derivatei de ordinul I la studiul funcțiilor	127
5.4.1	Condiția suficientă de creștere (descreștere) a unei funcții	127
5.4.2	Puncte de extrem, extremele funcției. Condiția necesară de existență a extremului unei funcții. Puncte staționare. Puncte critice	128
5.4.3	Condițiile suficiente de existență a extremului local al unei funcții	129
5.4.4	Condițiile suficiente de existență a extremului local al unei funcții exprimate prin derivate de ordin superior	130
5.4.5	Aflarea valorii celei mai mari și valorii celei mai mici ale unei funcții pe un segment	132
5.5	Rolul derivatei de ordinul II în studiul funcțiilor de o variabilă reală	132
5.5.1	Convexitatea și concavitata graficului unei funcții. Puncte de inflexiune	132
5.5.2	Condiția suficientă de convexitate (concavitate) strictă a unei funcții	133
5.5.3	Condiția necesară de existență a punctului de inflexiune	134
5.5.4	Condițiile suficiente de existență a punctului de inflexiune	135
5.5.5	Asimptotele graficului unei funcții	135
5.5.6	Planul studierii funcțiilor. Construcția graficului funcției	136

Prefață

Cursul de față își propune prezentarea noțiunilor și teoremelor de bază ale unității de curs Analiza Matematică I, prevăzut în planul de învățământ pentru specialitatea 141.01 Matematica și 141.02 Informatica din Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți.

Expunerea presupune din partea cititorului cunoașterea cursului liceal de matematică. Cursul de Analiză Matematică I se predă în semestrul I și este o disciplină fundamentală pentru specialitatea nominalizată mai sus. El servește drept fundament pentru disciplinele Analiza matematică II și Analiza matematică III și pentru disciplinele de specialitate: ecuații diferențiale, analiza funcțională, analiza complexă, topologie, ecuații cu derivate parțiale, teoria probabilităților.

Majoritatea teoremelor sunt însoțite de demonstrații riguroase, menite să faciliteze înțelegerea și aplicarea lor ulterioară. Noțiunile teoretice expuse sunt însoțite de numeroase exemple care au drept scop ilustrarea cazurilor tipice de aplicare a rezultatelor teoretice.

Din motivul că rezultatele prezentate în această lucrare sunt clasice (noutatea fiind în aranjamentul lor) nu am explicat sursa fiecărui subiect, referințele fiind adunate la sfârșit. În nici un caz lipsa referințelor bibliografice în text nu implică vreo pretenție de originalitatea din partea autorului.

Capitolul 1

Introducere

1.1 Obiectul Analizei matematice. Mulțimi

1.1.1 Obiectul Analizei matematice

Analiza matematică este un domeniu al matematicii în care funcțiile și generalizările lor sunt studiate folosind metoda limitelor. Noțiunea de limită este strâns legată de noțiunea de mărime infinit mică, de aceea putem spune că Analiza matematică studiază funcțiile folosind metoda infinit micilor.

Obiectul de studiu în Analiza matematică clasică este funcția.

Analiza matematică, în sensul larg al acestui termen, cuprinde un domeniu vast al matematicii care include: calculul diferențial, calculul integral, teoria funcțiilor de variabilă reală, teoria funcțiilor de variabilă complexă, teoria aproximațiilor, teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, teoria ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale, teoria ecuațiilor integrale, geometria diferențială, calculul variațional, analiza funcțională și alte discipline.

Totuși, termenul Analiza matematică, de cele mai dese ori se folosește pentru a denumi doar *Bazele Analizei matematice*, care cuprind teoria numerelor reale, teoria limitelor, teoria seriilor, calculul diferențial și integral, teoria funcțiilor implicite, serii Fourier, integrale Fourier.

1.1.2 Simboluri logice. Mulțimi finite și infinite

Textul matematic constă din formule matematice și textul propriu-zis pentru care se folosește limba maternă. Anumite îmbinări de cuvinte, frecvent întâlnite au notații speciale.

Pe viitor vom folosi frecvent următorii operatori logici:

- 1) *negația*, notată cu *non* sau \neg , în limbaj uzual citim *nu*;
- 2) *conjuncția*, notată cu \wedge , în limbaj uzual citim *și*;
- 3) *disjuncția*, notată cu \vee , în limbaj uzual citim *sau*;

4) *implicația*, notată cu \Rightarrow , în limbaj uzual citim *rezultă că, implică*; iar notația $A \Rightarrow B$ se citește *dacă A, atunci B*;

5) *echivalența*, notată cu \Leftrightarrow , în limbaj uzual citim *atunci și numai atunci sau dacă și numai dacă*.

În afară de acești operatori logici, în cele ce urmează, vom folosi și cuantificatorii:

1) *cuantificatorul universal*, notat \forall , în limbaj uzual citim *pentru orice sau pentru fiecare, sau pentru toți* (acest semn reprezintă prima literă „răsturnată” a cuvântului englez All);

2) *cuantificatorul existențial*, notat \exists , în limbaj uzual citim *există* (acest semn reprezintă prima literă „răsturnată” a cuvântului englez Exist).

Notația $\exists!$ se citește *există un singur*, iar îmbinarea de cuvinte *astfel încât* se va abrevia cu a.î.

„Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecățile larg răspândite, cu sentințele filozofilor, dar și cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu – teoria mulțimilor.” F. Hausdorff

Conceptul de mulțime este unul de bază în matematică. Toate obiectele matematice se reduc, în ultima instanță, la acest concept. Intuitiv se poate spune că o mulțime este: *„o colecție de obiecte de natură oarecare, bine determinate și bine distincte”* (Georg Cantor (1845 – 1918), creatorul teoriei mulțimilor, matematician german).

Cuvintele *colecție, familie și clasă* vor fi sinonime cu *mulțime*.

Obiectele care alcătuiesc mulțimea se numesc *elementele* sau *punctele* mulțimii.

Fie A o mulțime. Scriem $x \in A$ dacă x este un element al mulțimii A ; în caz contrar $x \notin A$.

Unele mulțimi pot fi descrise enumerând elementele lor. Astfel $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ este mulțimea ale cărei elemente sunt x_1, x_2, \dots, x_n ; $\{x\}$ este mulțimea al cărei singur element este x . De regulă, mulțimile sunt descrise prin proprietățile lor. Scriem

$$A = \{x : P(x)\} \text{ sau } A = \{x \mid P(x)\}$$

pentru mulțimea tuturor elementelor x care au proprietatea P .

Exerciții.

1. Enumărați elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : |x| + |y| = 2\}$.

2. Sunt oare adevărate următoarele afirmații:

a) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$ a.î. $x^2 + ax = 0$,

b) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $x^2 + ax = 0$?

O mulțime care conține un număr finit de elemente se numește *finită*, iar în caz contrar, *infinită*.

Mulțimea care nu are nici un element se numește *vidă* și se notează \emptyset .

O mulțime A se numește *submulțime* a mulțimii B dacă fiecare element al mulțimii A este și element al mulțimii B , adică

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Se notează $A \subset B$ sau $B \supset A$.

Convenim că pentru orice mulțime A avem $\emptyset \subset A$.

1.1.3 Operații cu mulțimi

Definiția 1.1. Mulțimile A și B se numesc *egale* dacă $A \subset B$ și $B \subset A$. Se notează $A = B$.

Definiția 1.2. Se numește *reuniunea* mulțimilor A și B , mulțimea C , care constă din acele elemente care-i aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B . Se notează $C = A \cup B$.

Astfel $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Definiția 1.3. Se numește *intersecția* mulțimilor A și B , mulțimea D , care constă din acele elemente care-i aparțin și lui A și lui B . Se notează $D = A \cap B$.

Astfel $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Definiția 1.4. Se numește *diferența* mulțimilor A și B , mulțimea E , care constă din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B . Se notează $E = A \setminus B$.

Astfel $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Definiția 1.5. Două mulțimi A și B care nu au elemente comune (adică $A \cap B = \emptyset$) se numesc *disjuncte*.

Propoziția 1.1. Fie mulțimile A , B și C . Atunci avem:

1) proprietatea de idempotență:

$$A \cap A = A \cup A = A.$$

2) proprietatea de comutativitate:

$$A \cap B = B \cap A$$

și

$$A \cup B = B \cup A.$$

3) proprietatea de asociativitate:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

și

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

4) proprietatea de distributivitate:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

și

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Observație. Analog se definesc mulțimile

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

și

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Mai general, fiind dată o familie de mulțimi A_i , cu $i \in I$, unde I este o mulțime arbitrară de indici, putem considera

$$\bigcap_{i \in I} A_i,$$

mulțimea tuturor elementelor care aparțin tuturor mulțimilor A_i și

$$\bigcup_{i \in I} A_i,$$

mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin unei mulțimi A_i .

Propoziția 1.2 (Legile lui De Morgan). Pentru trei mulțimi A, B și C avem:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

și

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Definiția 1.6. Se numește *diferența simetrică* a mulțimilor A și B , mulțimea F , elementele căreia îi aparțin lui A , dar nu-i aparțin lui B și-i aparțin lui B , dar nu-i aparțin lui A . Se notează $F = A \Delta B$.

Deci $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B \text{ sau } x \in B \text{ și } x \notin A\}$.

Definiția 1.7. Fie X o mulțime și A o submulțime a lui X . Submulțimea lui X formată din acele elemente ce nu aparțin lui A se numește *complementara lui A în raport cu X* . Se notează $C_X A$.

Deci $C_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}$.

Definiția 1.8. Fie A și B două mulțimi. Mulțimea ale cărei elemente sunt toate perechile ordonate (a, b) , cu $a \in A$ și $b \in B$ se numește *produsul cartezian* al mulțimilor A și B (în această ordine). Se notează $A \times B$.

Deci $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.

Observație.

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ și } b = b'.$$

Exerciții.

Aflați mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, dacă

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| + |x - 2| < 3\}$.

1.1.4 Relații binare. Relația de ordine. Relația de echivalență

Fie dată o mulțime nevidă A .

Definiția 1.9. Se numește *relație binară* definită pe mulțimea nevidă A o submulțime nevidă R a produsului cartezian $A \times A$.

Dacă $(x, y) \in R$ vom scrie xRy și vom citi: x se află în relația R cu y .

O relație binară R pe o mulțime nevidă A se numește:

- *reflexivă*, dacă xRx , pentru orice $x \in A$;
- *simetrică*, dacă $xRy \Rightarrow yRx$, pentru orice $x, y \in A$;
- *antisimetrică*, dacă $(xRy \text{ și } yRx) \Rightarrow x = y$, pentru orice $x, y \in A$;
- *tranzitivă*, dacă $(xRy \text{ și } yRz) \Rightarrow xRz$, pentru orice $x, y, z \in A$.

Definiția 1.10. O relație binară pe mulțimea nevidă A se numește *relație de ordine* pe A , dacă ea este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică.

Observație. De multe ori relația de ordine R se notează prin \leq . Astfel, xRy se scrie sub forma $x \leq y$.

Definiția 1.11. Un cuplu (A, \leq) , unde A este o mulțime nevidă, iar \leq este o relație de ordine pe A se numește *mulțime ordonată*.

Definiția 1.12. Mulțimea ordonată (A, \leq) , se numește *total ordonată* dacă pentru orice $x, y \in A$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (adică orice două elemente sunt comparabile).

Definiția 1.13. O relație R pe o mulțime nevidă A se numește *relație de echivalență* dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Observație. De multe ori relația de echivalență R se notează prin \sim . Astfel xRy se scrie sub forma $x \sim y$.

Definiția 1.14. Fie \sim o relație de echivalență pe A și $x \in A$. Mulțimea

$$\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

se numește *clasa de echivalență a lui x* .

Observație. Fie \sim o relație de echivalență pe A și $x, y \in A$. Atunci $\hat{x} = \hat{y}$ sau $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Definiția 1.15. Fie \sim o relație de echivalență pe A . Mulțimea

$$\{\hat{x} \mid x \in A\},$$

notată A/\sim , se numește *mulțimea cât (sau factor) a lui A generată de \sim* .

Definiția 1.16. Fie \sim o relație de echivalență pe A . Funcția

$$p: A \rightarrow A/\sim,$$

dată de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in A$, se numește *surjecția canonică generată de \sim* .

1.2 Noțiune generală de funcție

1.2.1 Noțiune de funcție. Diferite moduri de definire a funcției. Graficul funcției

Pentru matematicienii de acum un secol și jumătate, cuvântul funcție însemna, în mod obișnuit, o formulă, ca de exemplu

$$f(x) = x^3 + 2x - 5,$$

care asocia oricărui număr real un alt număr real.

Faptul că anumite formule, ca de exemplu

$$f(x) = \sqrt{x-3},$$

nu asociau numere reale oricărui număr real, era binecunoscut, dar nu era considerat ca un motiv destul de solid pentru a extinde noțiunea de funcție.

Întrebarea dacă asocierea

$$f(x) = |x|$$

este o „funcție”, a născut controverse la acel timp, deoarece, în definitiv, definiția lui $|x|$ este dată „pe bucăți”, anume

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Pe măsură ce matematica s-a dezvoltat, a devenit din ce în ce mai clar că cerința ca o funcție să fie dată printr-o formulă este foarte restrictivă și că o definiție mai generală este necesară.

Iată o definiție „provizorie” a noțiunii de funcție:

Definiția 1.17. Fie X și Y două mulțimi. Vom numi o funcție f de la mulțimea X la mulțimea Y o lege de corespondență conform căreia **fiecărui** element $x \in X$ i se asociază un **unic** element $y \in Y$.

Termenii *funcție*, *aplicație*, *operator*, *corespondență*, *transformare* sau *reprezentare* sunt sinonime.

Să observăm că definiția funcției de mai sus, are un punct slab, anume ambiguitatea expresiei „lege de corespondență”.

Am dori să eliminăm acest inconvenient prin definirea funcției numai în termeni de teoria mulțimilor. Această abordare are dezavantajul de a fi oarecum artificială, dar câștigul în ceea ce privește rigoarea este mult mai important comparativ cu orice altfel de dezavantaje.

Definiția 1.18. Fie X și Y două mulțimi. O funcție de la X la Y este tripletul format cu aceste două mulțimi și o submulțime f a lui $X \times Y$ cu proprietățile următoare:

- 1) pentru orice $x \in X$ există $y \in Y$ astfel ca $(x, y) \in f$;
- 2) dacă pentru $x \in X$ și $y, y' \in Y$ avem $(x, y) \in f$ și $(x, y') \in f$, atunci $y = y'$.

Tripletul (X, Y, f) se mai notează

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{sau} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{sau} \quad y = f(x), x \in X.$$

Mulțimea X se numește *domeniul de definiție a funcției f* și se notează $D(f)$.

Elementul y pe care legea f îl pune în corespondență elementului $x \in X$ se numește *imaginea elementului x prin f* sau *valoarea lui f în x* și se notează $f(x)$. Elementul x se numește *variabila* sau *argumentul funcției*.

Mulțimea

$$E(f) = \{y \mid \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$$

se numește *mulțimea valorilor aplicației f* sau *codomeniul lui f* .

Exemple.

1) Fie X o mulțime. Aplicația $I_X : X \rightarrow X$, definită prin: $I_X(x) = x$, pentru fiecare $x \in X$ este numită *aplicația identică a mulțimii X* .

2) Funcția *signum*, notată $sign : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

3) Funcția lui Dirichlet $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Considerăm că funcțiile $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ și $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ sunt *egale* atunci și numai atunci când

- 1) $X_1 = X_2$,
- 2) $f_1(x) = f_2(x)$, pentru orice $x \in X_1$.

Se notează $f_1 = f_2$.

Definiția 1.19. Fie $f : X \rightarrow Y$ și $X_0 \subset X$. Definim funcția $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ punând

$$f_0(x) := f(x), \text{ pentru orice } x \in X_0.$$

Funcția f_0 se numește *restricția funcției f la mulțimea X_0* , iar funcția f se numește *prelungirea funcției f_0 la mulțimea X* .

Restricția lui f la X_0 se notează cu simbolul $f|_{X_0}$.

Definiția 1.20. Fie $f : X \rightarrow Y$ și $A \subset X$, $B \subset Y$. *Imaginea mulțimii A prin funcția f* se numește mulțimea

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Preimagea sau imaginea reciprocă a mulțimii B prin funcția f se numește mulțimea

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \exists y \in B : f(x) = y\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Remarcăm că $f(A) \subset Y$, $f^{-1}(B) \subset X$.

Definiția 1.21. Fie $f : X \rightarrow Y$. Vom numi *graficul funcției f* , mulțimea

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

1.2.2 Clasificarea funcțiilor: surjecții, injecții, bijecții

Definiția 1.22. Funcția $f : X \rightarrow Y$ se numește *surjectivă* (sau aplicația mulțimii X pe Y) dacă imaginea lui X prin f , adică $f(X)$, coincide cu Y

$$f(X) = Y.$$

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este surjectivă, deoarece $y = -1$ nu are preimage prin f , căci nu există așa număr real x pătratul căruia ar fi egal cu -1 . Însă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ este o surjecție.

Definiția 1.23. Funcția $f : X \rightarrow Y$ se numește *injectivă* dacă pentru orice $x_1 \in X$ și orice $x_2 \in X$:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $x_1 \neq x_2$ și admitem prin absurd că $f(x_1) = f(x_2)$, obținem

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

ceea ce contrazice ipoteza $x_1 \neq x_2$.

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă, deoarece pentru $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$ avem $f(x_1) = f(x_2) = 1$.

Definiția 1.24. Funcția $f : X \rightarrow Y$ care este simultan surjectivă și injectivă se numește *bijectivă*.

Exemplu. Funcțiile liniare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a și b sunt constante reale, sunt bijectii.

Exercițiu. Aflați $E(f)$ pentru funcțiile:

- a) $X = Y = \mathbb{Z} : f(x) = x + 1, x \in \mathbb{Z}$;
- b) $X = Y = \mathbb{Z} : f(x) = |x| + 1, x \in \mathbb{Z}$;
- c) $X = Y = \mathbb{Z} : f(x) = x^2 - 6x + 5, x \in \mathbb{Z}$.

Care din aceste funcții sunt surjecții? injecții? bijectii?

1.2.3 Compunerea funcțiilor. Funcții inverse, parametrice și implicite

Fie $f : X \rightarrow Y$, iar $g : Y \rightarrow Z$. Deoarece $f(X) \subset Y$, funcția g , fiecărui element $f(x) \in f(X) \subset Y$ îi asociază un anumit element $g(f(x)) \in Z$. În așa fel, fiecărui $x \in X$ conform legei $g \circ f$ i se pune în corespondență elementul $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $g(f(x)) \in Z$. Astfel este definită o funcție nouă, care se numește compunerea sau superpoziția funcțiilor f și g .

Definiția 1.25. Fie $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Funcția $h : X \rightarrow Z$, definită de formula

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in X \quad (h = g \circ f)$$

se numește *funcție compusă* sau *compunerea funcțiilor f și g* .

De exemplu, funcția

$$h = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

este compoziția funcțiilor

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1] \quad \text{și} \quad g(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, +\infty).$$

Definiția 1.26. Fie $f : X \rightarrow Y$ este o funcție bijectivă. În acest caz, fiecărui $y \in Y$ îi corespunde o singură preimagine x , pe care o vom nota cu $f^{-1}(y)$ și așa încât $f(x) = y$. Deci, este definită o funcție $f^{-1} : Y \rightarrow X$ care se numește *funcția inversă funcției f* .

Evident, că funcția f este inversa funcției f^{-1} . De aceea funcțiile f și f^{-1} sunt numite *reciproc inverse*. Pentru ele au loc relațiile

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad (\forall y \in Y); \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in X).$$

De exemplu, funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă și primește valori pe segmentul $[-1, 1]$. Deci pe $[-1, 1]$ este definită funcția inversă funcției sinus și anume funcția arcsin : $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Definiția 1.27. Fie $\varphi : \Omega \rightarrow X$, $\psi : \Omega \rightarrow Y$, și cel puțin una din aceste funcții, de exemplu φ , este bijectivă. Atunci există funcția inversă $\varphi^{-1} : X \rightarrow \Omega$, deci și funcția $\psi \circ \varphi^{-1} : X \rightarrow Y$. O funcție astfel definită se numește *funcție definită în mod parametric cu ajutorul funcțiilor* $\varphi : \Omega \rightarrow X$ și $\psi : \Omega \rightarrow Y$, iar variabila din Ω se numește *parametru*.

De exemplu, egalitățile $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ definesc parametric funcția $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$. Într-adevăr, întrucât $t \mapsto a \cos t$, $t \in [0, \pi]$ este o bijecție $[0, \pi] \mapsto [-a, a]$, pentru fiecare $x \in [-a, a]$ din egalitatea $x = a \cos t$ aflăm valoarea unică $t = \arccos \frac{x}{a}$ care aparține segmentului $[0, \pi]$. Înlocuind această valoare în a doua egalitate, obținem

$$y = a \sin \left(\arccos \frac{x}{a} \right) = a \sqrt{1 - \cos^2 \left(\arccos \frac{x}{a} \right)} = a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

adică $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$.

Definiția 1.28. Fie că pe mulțimea $G = X \times Y$ este definită o funcție $F : G \rightarrow \Delta$, unde mulțimea Δ conține elementul nul. Admitem că există mulțimile $E \subset X$, $B \subset Y$ așa încât pentru fiecare $x \in E$ fixat, ecuația $F(x, y) = 0$ are o singură soluție $y \in B$. Atunci pe mulțimea E poate fi definită o funcție $f : E \rightarrow B$, care fiecărui $x \in E$ îi pune în corespondență acea valoare $y \in B$, care pentru x indicat este soluția ecuației $F(x, y) = 0$.

Referitor la funcția $y = f(x)$, $x \in E$, $y \in B$, astfel definită se spune că ea este definită *implicit* prin ecuația $F(x, y) = 0$.

De exemplu, ecuația

$$\frac{y - 2x^2}{y - 8} = 0$$

definește funcția $y = 2x^2$, $x \neq \pm 2$.

Exerciții.

1. Fie $y = \cos x$, $v = \ln y$, $u = \sqrt[3]{3 + v^2}$. Aflați $u \circ v \circ y$.
2. Aflați funcția inversă funcției $y = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Aflați expresia explicită pentru funcția definită parametric

$$x = \frac{2at}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2at^2}{1 + t^2}, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

4. Aflați expresia explicită pentru funcția $f : [\pi, 2\pi] \rightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definită implicit de ecuația

$$\cos x + \sin x = 0, \quad x \in [\pi, 2\pi], \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

1.3 Noțiunile de grup, inel și corp

Definiția 1.29. Un cuplu $(G, *)$ format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție $*$ pe G (adică $x * y \in G$, pentru orice $x, y \in G$), se numește *grup* dacă sunt verificate următoarele axiome:

1)

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

pentru orice $x, y, z \in G$;

2) există $e \in G$ astfel încât

$$e * x = x * e = x,$$

pentru orice $x \in G$;

3) pentru orice $x \in G$ există $x' \in G$ astfel încât

$$x' * x = x * x' = e.$$

Dacă în plus este verificată și axioma

4)

$$x * y = y * x,$$

pentru orice $x, y \in G$, atunci grupul se numește *comutativ* (sau *abelian*).

Observație. Elementul e este unic determinat și se numește *elementul neutru al grupului* G . Elementul x' este unic determinat și poartă numele de *simetricul* (sau *inversul* sau *opusul*) elementului x .

Definiția 1.30. O mulțime nevidă A , împreună cu două legi de compoziție $+$ și \cdot (adică $x + y \in A$ și $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$) se numește *inel* dacă sunt verificate următoarele axiome:

1) $(A, +)$ este grup abelian;

2) (A, \cdot) este monoid, adică

2')

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

pentru orice $x, y, z \in A$;

2'') există $1 \in A$ astfel încât

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

pentru orice $x \in A$.

3)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

și

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

pentru orice $x, y, z \in A$, adică înmulțirea este distributivă față de adunare la stânga și la dreapta.

Observație.

1. Elementul neutru al grupului $(A, +)$, notat cu 0 , se numește *elementul zero* al inelului, iar 1 (care este unic determinat) poartă numele de *elementul unitate* al inelului.

2. Dacă este satisfăcută și axioma:

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

pentru orice $x, y \in A$, atunci spunem că inelul A este *comutativ*.

3. Spunem că A este un *inel fără divizori ai lui zero* dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \text{ implică } x \cdot y \neq 0.$$

Un inel comutativ cu cel puțin două elemente și care nu are divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate*.

Definiția 1.31. Un inel K se numește *corp* dacă $0 \neq 1$ și dacă este satisfăcută următoarea axiomă:

pentru orice $x \in K \setminus \{0\}$ există $x^{-1} \in K$ astfel încât

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1,$$

adică orice element al lui K care este diferit de 0 este simetrizabil în raport cu înmulțirea.

Un corp se numește *comutativ* dacă înmulțirea sa este comutativă.

1.4 Mulțimea numerelor reale. Axiomatica mulțimii numerelor reale

Definiția 1.32. Fie A o mulțime nevidă. Dacă fiecărei perechi de elemente $(x, y) \in A \times A$ conform unei anumite legi $*$ i se pune în corespondență elementul $z \in A$, atunci spunem că pe mulțimea A este definită *operația algebrică* $*$ și se notează $z = x * y$.

Definiția 1.33. O mulțime \mathbb{R} se numește *mulțime de numere reale*, iar elementele ei se numesc *numere reale*, dacă ea este înzestrată cu două operații algebrice $+$ (adunarea) $((x, y) \rightarrow x + y)$ și \cdot (înmulțirea) $((x, y) \rightarrow x \cdot y)$ și cu o relație de ordine notată „ \leq ”, care satisface următorul complex de axiome:

1. axiomele adunării;
2. axiomele înmulțirii;
3. axiomele de ordine;
4. axioma continuității.

1.4.1 Axiomele adunării, unele consecințe ale lor

Se definește *operația de adunare*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

care fiecărei perechi (x, y) de numere reale îi pune în corespondență numărul $z \in \mathbb{R}$ care se numește *suma* numerelor x, y și au loc axiomele:

1. Adunarea este *comutativă*: $x + y = y + x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Adunarea este *asociativă*: $(x + y) + z = x + (y + z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. Există un număr numit *zero* și notat cu 0 încât $x + 0 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
4. Pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$ există un număr notat cu $-x$ și numit *număr opus* astfel încât $x + (-x) = 0$.

Consecințe din axiomele adunării:

1. În mulțimea \mathbb{R} zero este unic.
2. Pentru fiecare număr real numărul lui opus este unic.
3. Pentru orice pereche ordonată de numere x și y numărul $x + (-y)$ se numește *diferența* numerelor x și y și se notează $x - y$.

1.4.2 Axiomele înmulțirii, unele consecințe ale lor

Se definește *operația de înmulțire* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care fiecărei perechi de numere (x, y) îi pune în corespondență elementul $x \cdot y \in \mathbb{R}$ numit *produsul* lor și sunt satisfăcute axiomele:

1. Înmulțirea este *comutativă*: $x \cdot y = y \cdot x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Înmulțirea este *asociativă*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. Există un așa număr numit *unitate* și notat cu 1 încât $x \cdot 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
4. Pentru orice $x \neq 0$ există un număr, numit *inversul lui x* , notat cu x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = 1$.
5. Proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Consecințe din axiomele înmulțirii:

1. În mulțimea \mathbb{R} numărul unitate este unic.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists! x^{-1}$.
3. Pentru orice pereche ordonată de numere $x, y \in \mathbb{R}$ și $y \neq 0$ numărul $x \cdot y^{-1}$ se numește *câtul* numerelor x și y .

Consecințe din axiomele de adunare și înmulțire:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$.
2. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$.

Exercițiu. Demonstrați consecințele de mai sus.

Observație.

1. $(\mathbb{R}, +)$ este un grup abelian.
2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

1.4.3 Axiomele de ordine

Pe mulțimea \mathbb{R} este definită o relație de ordine notată cu " \leq ". Conform definiției relației de ordine avem următoarele proprietăți:

1. $x \leq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. $(x \leq y \text{ și } y \leq x) \Rightarrow x = y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $(x \leq y \text{ și } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. Relația de ordine pe mulțimea \mathbb{R} este *totală*, adică pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem fie $x \leq y$, fie $y \leq x$.
5. Dacă pentru $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
6. Dacă pentru $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ și $0 \leq z$, atunci $x \cdot z \leq y \cdot z$.

1.4.4 Axioma continuității

Dacă X și Y sunt submulțimi nevide din \mathbb{R} și satisfac condiția:

$$\forall x \in X \text{ și } \forall y \in Y : x \leq y,$$

atunci în \mathbb{R} există un astfel de număr $c \in \mathbb{R}$ încât

$$x \leq c \leq y, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

În mulțimea \mathbb{R} are loc **proprietatea lui Arhimede**:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } n \leq x < n + 1.$$

Acest număr n se numește *partea întreagă* a lui x și se notează $[x]$.

Exemplu. $[1, 2345] = 1$, $[-1, 2345] = -1$.

Definiția 1.34. Fie $x \in \mathbb{R}$. Vom numi *modulul* sau *valoarea absolută* a numărului x , numărul

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Proprietăți:

1. $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
4. Fie $x \in \mathbb{R}$ și $\varepsilon > 0$. Avem

$$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$$

5. $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (*inegalitatea triunghiului*);
6. $|x - y| \geq ||x| - |y||$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vom numi *distanță* pe mulțimea \mathbb{R} o funcție d definită pe produsul $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu valori reale nenegative care satisface următoarele condiții:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice x și $y \in \mathbb{R}$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru toți x, y și $z \in \mathbb{R}$.

Ușor se verifică că funcția $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ este o distanță pe \mathbb{R} .

1.4.5 Dreapta reală

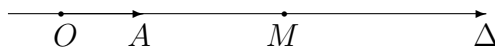
Să considerăm o axă, adică o dreaptă pe care sunt fixate un punct O numit origine, o unitate de măsură și un sens. Fie $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ vectorul unitate. Notăm cu Δ mulțimea punctelor acestei axe și observăm că Δ se poate organiza ca un grup în raport cu operația de adunare dată prin: dacă M, N sunt puncte din Δ , atunci $P = M + N$ se definește de relația vectorială $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

De asemenea pe Δ se introduce relația de ordine:

$$M \leq N \iff \text{vectorii } \overrightarrow{MN} \text{ și } \vec{u} \text{ au același sens.}$$

Admitem că Δ este un grup ordonat în care funcționează proprietatea lui Arhimede și în care orice submulțime nevidă majorată a sa are margine superioară.

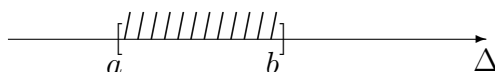
În aceste condiții, se arată că există o singură aplicație $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \Delta$ care asociază oricărui număr real x , acel punct unic $M \in \Delta$ așa ca $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}$, deci $\psi(x) = M$ și în particular $\psi(0) = O$, $\psi(1) = A$.



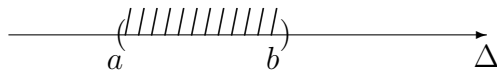
Aplicația ψ este o bijecție, numită *bijecția lui Descartes*. Prin bijecția lui Descartes mulțimea \mathbb{R} poate fi identificată cu mulțimea punctelor unei axe, ceea ce motivează denumirea de *dreaptă reală* ce se folosește pentru mulțimea \mathbb{R} și de *puncte* pentru numere reale.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ așa ca $a < b$. Numim

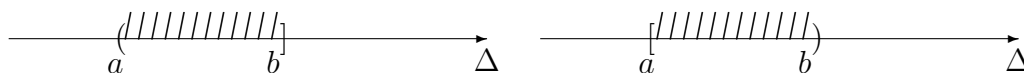
- *interval închis și mărginit de origine a și extremitate b* , notat cu $[a, b]$ mulțimea tuturor numerelor reale x așa încât $a \leq x \leq b$.



- *interval deschis de origine a și extremitate b* , notat (a, b) mulțimea tuturor numerelor reale x așa încât $a < x < b$.

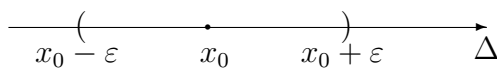


- *interval semi-deschis de origine a și extremitate b* , deschis în a (resp. b), închis în b (resp. a), notat $(a, b]$ (resp. $[a, b)$) mulțimea tuturor numerelor reale x așa încât $a < x \leq b$ (respectiv $a \leq x < b$).



1.4.6 Noțiune de vecinătate a unui punct

Definiția 1.35. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Un interval deschis centrat în x_0 de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se numește ε -vecinătatea punctului x_0 și se notează cu $U(x_0; \varepsilon)$.



Definiția 1.36. Vom numi *vecinătate a punctului* $x_0 \in \mathbb{R}$ o mulțime $V \subset \mathbb{R}$ care conține un interval deschis centrat în punctul x_0 .

Exemplu. Intervalul $(-2, 3)$ este o vecinătate a punctului 1, deoarece el conține intervalul deschis $(0, 2)$ centrat în 1.

Proprietatea de separație Hausdorff. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \neq y$, atunci există vecinătăți disjuncte ale lor.

Exercițiu. Demonstrați proprietatea de separație Hausdorff.

Definiția 1.37. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă. Un punct $x \in A$ se numește *interior* mulțimii A , dacă există o ε -vecinătate a acestui punct care în întregime se conține în A .

Mulțimea tuturor punctelor interioare mulțimii A se numește *interiorul* lui A și se notează $\overset{\circ}{A}$.

Dacă toate punctele mulțimii A sunt interioare, (adică $\overset{\circ}{A} = A$), atunci A se numește *mulțime deschisă*.

O mulțime A se numește *închisă*, dacă complementara ei este deschisă.

Exemplu. Un interval deschis (a, b) este mulțime deschisă, deoarece dacă $x_0 \in (a, b)$ și $\varepsilon \leq \min\{x_0 - a, b - x_0\}$, atunci

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b).$$

Întreaga mulțime $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ este deschisă și deci mulțimea vidă \emptyset ($\emptyset = C_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$) este închisă. Totuși, mulțimea vidă \emptyset este totodată și deschisă, pentru a nega aceasta este suficient de a considera că \emptyset conține cel puțin un punct care nu este interior, ceea ce este absurd, căci \emptyset nu conține puncte. Deci, \emptyset este deschisă, iar $\mathbb{R} = C_{\mathbb{R}}\emptyset$ este închisă. Prin urmare, \mathbb{R} și \emptyset sunt concomitent deschise și închise. Acestea sunt singurele submulțimi ale lui \mathbb{R} cu această proprietate.

Definiția 1.38. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se numește *punct de limită* sau *punct de acumulare* pentru mulțimea A , dacă în orice vecinătate a acestui punct se conțin puncte din mulțimea A diferite de x_0 , adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi cel puțin un punct $y \in A, y \neq x_0$ astfel încât $|y - x_0| < \varepsilon$.

Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se numește *mulțime derivată* și se notează cu A' .

Exemple.

- 1) Fie $A = [0, 1]$. Mulțimea derivată este $A' = A$.
- 2) Pentru mulțimea $A = (0, 1] \cup \{2\}$ mulțimea derivată este segmentul $[0, 1]$.
- 3) Pentru mulțimea $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ mulțimea derivată este $A' = \{0\}$.
- 4) Mulțimea $A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100} \right\}$ nu are puncte de limită, $A' = \emptyset$.

Remarcă. Punctul de limită al unei mulțimi poate să aparțină sau să nu aparțină mulțimii.

Definiția 1.39. Un punct $x \in A$ se numește *punct izolat al mulțimii* A dacă el nu este punct de acumulare pentru această mulțime, adică dacă există o vecinătate a lui în care nu se conțin alte puncte din A .

Definiția 1.40. Un punct $x \in A$ se numește *punct frontieră al mulțimii* A dacă orice vecinătate a acestui punct conține cel puțin un punct din A și cel puțin un punct care nu este în A . Mulțimea tuturor punctelor frontieră ale lui A se numește *frontiera* lui A și se notează cu ∂A .

Închiderea mulțimii A , notată cu \bar{A} este

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

Exemplu. Fie $A = (-\infty, -1] \cup (1, 2) \cup \{3\}$. Atunci:

- 1) Mulțimea punctelor de limită ale lui A este $A' = (-\infty, -1] \cup [1, 2]$.
- 2) $\partial A = \{-1, 1, 2, 3\}$ și $\bar{A} = (-\infty, -1] \cup [1, 2] \cup \{3\}$.

3) 3 este unicul punct izolat al lui A .

4) Exteriorul lui A este $(-1, 1) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Definiția 1.41. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Mulțimea

$$\dot{U}(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

se numește ε -*vecinătatea perforată* (sau *găurită*) a punctului x_0 .

Teorema 1.1.

a) *Reuniunea mulțimilor deschise este deschisă.*

b) *Intersecția mulțimilor închise este închisă.*

Aceste afirmații se aplică la orice colecții, finite sau infinite, de mulțimi deschise și închise.

Exemplu. Intervalul închis $[a, b] \in \mathbb{R}$ este mulțime închisă, deoarece complementara lui este reuniunea mulțimilor deschise $(-\infty, a)$ și $(b, +\infty)$.

Intervalul semideschis $(a, b] \subset \mathbb{R}$ nu este nici mulțime deschisă și nici închisă. Deci, termenii „deschis” și „închis” nu sunt opuse în acest context, spre deosebire de cazul vorbirii uzuale.

Se poate arăta că intersecția unui număr finit de mulțimi deschise este deschisă și reuniunea unui număr finit de mulțimi închise este închisă. Totuși, intersecția unei infinități de mulțimi deschise nu este neapărat deschisă și reuniunea unei infinități de mulțimi închise nu este întotdeauna închisă.

1.4.7 Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

Vom conveni să adăugăm la mulțimea \mathbb{R} două obiecte noi, notate cu $-\infty$ și $+\infty$, care nu fac parte din \mathbb{R} , numite respectiv *minus infinit* și *plus infinit*.

Vom nota prin $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ și vom numi această mulțime *dreapta reală încheiată* sau *compactificată*.

Vom prelungi relația de ordine uzuală a mulțimii \mathbb{R} la mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$, convenind că

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În felul acesta, mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$ devine total ordonată.

Definiția 1.42. Numim *vecinătate a punctului* $+\infty$ orice mulțime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $(a, +\infty]$ unde $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definiția 1.43. Numim *vecinătate a punctului* $-\infty$ orice mulțime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $[-\infty, a)$ unde $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1.5 Mulțimi mărginite și mulțimi nemărginite. Principiul segmentelor incluse

1.5.1 Element maxim și element minim al unei mulțimi. Mulțimi mărginite

Definiția 1.44. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $a \in A$, astfel încât

$$x \leq a, \forall x \in A,$$

atunci elementul a se numește *element maxim* al mulțimii A și se notează $a = \max A$.

Definiția 1.45. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $a \in A$, astfel încât

$$a \leq x, \forall x \in A,$$

atunci elementul a se numește *element minim* al mulțimii A și se notează $a = \min A$.

Definiția 1.46. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $d \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$x \leq d, \forall x \in A,$$

atunci mulțimea A se numește *mărginită superior* sau *majorată*, iar numărul d se numește *majorant* al mulțimii A .

Definiția 1.47. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $c \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$c \leq x, \forall x \in A,$$

atunci mulțimea A se numește *mărginită inferior* sau *minorată*, iar numărul c se numește *minorant* al mulțimii A .

Definiția 1.48. O mulțime mărginită și superior și inferior se numește *mulțime mărginită*, adică $\exists m, M \in \mathbb{R}$, a.î. $m \leq x \leq M, \forall x \in A$.

Echivalent, mulțimea A este mărginită dacă există o constantă pozitivă $K > 0$, astfel încât

$$|x| \leq K, \forall x \in A.$$

1.5.2 Marginea superioară și marginea inferioară a unei mulțimi mărginite

Definiția 1.49. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime majorată. Un majorant c^* al mulțimii A se numește *margine superioară* sau *supremum* al mulțimii A dacă c^* este *cel mai mic majorant al lui* A , adică pentru orice alt majorant d , avem $c^* \leq d$. Se notează $c^* = \sup A$.

Definiția 1.50. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime minorată. Un minorant c_* al mulțimii A se numește *margină inferioară* sau *infimum* al mulțimii A dacă c_* este *cel mai mare minorant* al lui A , adică pentru orice alt minorant c , avem $c \leq c_*$. Se notează $c^* = \inf A$.

Observație. Fie A o mulțime majorată a lui \mathbb{R} , $c^* = \sup A$ și $\varepsilon > 0$ un număr strict pozitiv. Deoarece $c^* - \varepsilon < c^*$ rezultă că $c^* - \varepsilon$ nu este majorant al lui A , deci există $a \in A$ cu $c^* - \varepsilon < a$ (și evident $a \leq c^*$ deoarece c^* este un majorant al lui A), deci în orice interval de forma $(c^* - \varepsilon, c^*]$ există elemente din A .

Astfel obținem afirmațiile.

Teorema 1.2 (de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi). Fie A o submulțime nevidă a lui \mathbb{R} . Un număr c^* este margină superioară a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$ atunci și numai atunci când

1. $x \leq c^*$ pentru orice $x \in A$ și
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$ a.î. $x_\varepsilon > c^* - \varepsilon$.

Teorema 1.3 (de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi). Fie A o submulțime nevidă a lui \mathbb{R} . Un număr c_* este margină inferioară a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$ atunci și numai atunci când

1. $c^* \leq x$ pentru orice $x \in A$ și
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$ a.î. $x_\varepsilon < c^* + \varepsilon$.

Axioma lui Cantor (marchează una dintre deosebirile esențiale dintre \mathbb{Q} și \mathbb{R}). Orice submulțime nevidă mărginită superior a lui \mathbb{R} are margină superioară. Orice submulțime nevidă mărginită inferior a lui \mathbb{R} are margină inferioară.

Remarcă. Pentru submulțimile mulțimii \mathbb{Q} afirmația de mai sus nu are loc.

Într-adevăr, de exemplu $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 3\}$. Avem $\sup A = \sqrt{3}$, $\sup B = \sqrt{3}$, dar $\sup A \in \mathbb{R}$, iar $\sup B \notin \mathbb{Q}$.

Exercițiu. Reprezentați pe axa reală mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |5x - 7| < 10\}$. Există oare $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$?

1.5.3 Principiul segmentelor incluse (principiul Cauchy - Cantor)

Definiția 1.51. Un sistem de segmente

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

așa încât

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

se numește *sistem de segmente incluse*.

Definiția 1.52. Fie dat un sistem de segmente $[a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \dots$. Vom spune că *lungimile segmentelor* $[a_n, b_n]$ *tind la 0* cu creșterea lui $n = 1, 2, \dots$, dacă pentru fiecare număr pozitiv $\varepsilon > 0$ există un așa număr natural (rang) $N(\varepsilon)$ încât pentru toate numerele $n \geq N(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $b_n - a_n < \varepsilon$.

Teorema 1.4 (Principiul segmentelor incluse Cauchy–Cantor). *Pentru orice sistem de segmente incluse $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, lungimile cărora tind la 0, există un singur punct c comun tuturor segmentelor șirului.*

Demonstrație. Să arătăm mai întâi existența unui punct comun tuturor segmentelor sistemului dat, iar apoi vom demonstra unicitatea lui.

Să construim mulțimile $A = \{a_m, m \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Observăm că

$$a_m \leq b_n, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \text{și} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Conform axiomei continuității se va găsi un punct c astfel încât $a_m \leq c \leq b_n, \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$. În particular, dacă $m = n$ obținem

$$a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{adică} \quad c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să demonstrăm unicitatea acestui punct. Cu acest scop admitem contrariul, adică că se va găsi cel puțin încă un punct $c' \neq c$ comun tuturor segmentelor sistemului. Și fie $c < c'$.

Întrucât $a_n \leq c' \leq b_n$ și $a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$c' - c \leq b_n - a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1}$$

Deoarece lungimile segmentelor $[a_n, b_n]$ tind la 0, pentru numărul pozitiv arbitrar (oricât de mic) ε se va găsi un segment $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ lungimea căruia va fi mai mică decât ε , adică $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Dar atunci, din (1.1) obținem

$$c' - c \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon,$$

adică $c' - c < \varepsilon$.

Astfel am obținut că numărul nenegativ $c' - c$ este mai mic decât orice număr pozitiv ε , ceea ce e posibil doar dacă $c' - c = 0$, sau $c' = c$. Dar aceasta contrazice condiția $c' \neq c$ astfel presupunerea că punctul c nu este unic este falsă și este adevărată afirmația teoremei.

□

Capitolul 2

Șiruri de numere reale

2.1 Șir numeric. Limita șirului numeric

2.1.1 Noțiune de șir numeric. Șiruri mărginite. Exemple

Definiția 2.1. Se numește șir de numere reale o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Vom nota $f(n) = a_n$, unde n este *rangul* sau *locul* termenului a_n în șir. Termenul a_n se numește *termenul general* al șirului. Șirul

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

va fi notat pe scurt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sau simplu (a_n) .

Exemple.

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ este șirul $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$
3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n$ este șirul $1, -1, 1, -1, \dots$

Definiția 2.2. Șirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *mărginit* dacă se poate găsi o constantă pozitivă $M > 0$ așa încât $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Deoarece

$$|a_n| \leq M \iff a_n \in [-M, M],$$

șirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit dacă toți termenii lui se conțin într-un segment finit.

Exemple.

1. Șirurile $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt mărginite.
2. Șirul $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit.

2.1.2 Noțiune de limită a șirului numeric

Definiția 2.3. Se spune că șirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $a \in \mathbb{R}$ și se scrie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{sau} \quad a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty,$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ (dependent de ε) astfel încât pentru toți termenii șirului a_n cu rangul $n \geq N(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Șirul numeric care are limită se numește *șir convergent*. Șirul numeric care nu are limită se numește *șir divergent*.

Observăm că

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \iff a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \iff a_n \in U(a; \varepsilon).$$

Prin urmare, putem da o definiție echivalentă celei de mai sus

Definiția 2.4. Se spune că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $a \in \mathbb{R}$ dacă orice interval deschis centrat în a conține toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit dintre ei.

Exemplu. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{2n + 1} = 2.$$

Conform definiției limitei șirului pentru un număr $\varepsilon > 0$ arbitrar trebuie să găsim un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n > N(\varepsilon)$ să fie adevărată inegalitatea

$$\left| \frac{4n - 3}{2n + 1} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Vom rezolva ultima inegalitate în raport cu n .

$$\left| \frac{4n - 3}{2n + 1} - 2 \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{4n - 3 - 4n - 2}{2n + 1} \right| < \varepsilon \iff \frac{5}{2n + 1} < \varepsilon \iff n > \frac{5 - \varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Astfel dacă vom pune

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{5 - \varepsilon}{2\varepsilon} \right] + 1,$$

atunci $\forall n \geq N(\varepsilon)$ va avea loc inegalitatea $\left| \frac{4n - 3}{2n + 1} - 2 \right| < \varepsilon$ ceea ce conform definiției

limitei înseamnă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{2n + 1} = 2$.

Dacă $\varepsilon = 0.1$, atunci $N(\varepsilon) = 25$, iar dacă $\varepsilon = 0.01$, atunci $N(\varepsilon) = 250$.

Din definiția limitei șirului numeric rezultă cu ușurință următoarea afirmație.

Teorema 2.1. Prin adăugarea sau prin eliminarea unui număr finit de termeni:

- i) un șir convergent rămâne convergent către aceeași limită;
- ii) un șir divergent rămâne divergent.

2.1.3 Unicitatea limitei șirului numeric

Teorema 2.2. *Dacă un șir numeric are limită, atunci aceasta este unică.*

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir numeric. Admitem că acest șir are două limite diferite $a \neq b$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1(\varepsilon) \quad \text{a.î.}$$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad \text{a.î.}$$

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Fie $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci $\forall n \geq N(\varepsilon)$ inegalitățile (2.1) și (2.2) au loc concomitent și deci

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare pentru orice număr pozitiv $\forall \varepsilon > 0$ are loc inegalitatea $|a - b| < \varepsilon$, ceea ce este posibil, doar dacă $a = b$. Contradicția obținută demonstrează teorema. □

2.1.4 Mărginirea unui șir convergent

Teorema 2.3. *Orice șir numeric convergent este mărginit.*

Demonstrație. Fie dat șirul convergent $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Fixăm numărul pozitiv ε , d.e. $\varepsilon = 1$. Observăm că

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| = 1 + |a| = M_1, \forall n \geq N(1).$$

Fie $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{N(1)-1}|, M_1\}$. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $|a_n| \leq M$. □

Remarcă. Afirmția inversă nu are loc, *nu orice șir mărginit este convergent*. De exemplu, șirul $1, -1, 1, -1, \dots$ este mărginit, dar nu este convergent.

2.1.5 Teorema despre limita unui șir intermediar

Teorema 2.4 (Teorema „cleștelui”). Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri numerice. Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, și $a_n \rightarrow l$, $c_n \rightarrow l$, atunci și $b_n \rightarrow l$.

Demonstrație.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon, \forall n \geq N_1(\varepsilon).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon, \forall n \geq N_2(\varepsilon).$$

Fie $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci $\forall n \geq N$ avem

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon.$$

Deci $|b_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, ceea ce înseamnă că $b_n \rightarrow l$.

□

2.1.6 Trecerea la limită în inegalități

Teorema 2.5. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir convergent cu limita $a \in \mathbb{R}$ și fie $a < b$. Atunci există un număr $n_0 \in \mathbb{N}$ așa încât $a_n < b$, $\forall n \geq n_0$.

Demonstrație.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Fie $\varepsilon = b - a > 0$. Atunci $\exists n_0 = N(\varepsilon)$ a.î. $\forall n \geq n_0$ avem

$$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = a + b - a = b.$$

Deci $a_n < b$, $\forall n \geq n_0$.

□

Exerciții.

1. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $c < a$. Demonstrați că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n > c$, $\forall n \geq n_0$.

2. Arătați că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$.

Teorema 2.6. Fie date două șiruri convergente $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dacă $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci $a \leq b$.

Demonstrație. Fixăm numărul $\varepsilon > 0$ în mod arbitrar. Din definiția limitei șirului numeric deducem că

$$\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \forall n \geq N_1(\varepsilon);$$

$$\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon, \forall n \geq N_2(\varepsilon).$$

Fie $n_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci inegalitățile de mai sus au loc pentru orice $n \geq n_0$.
Deci

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon.$$

De aici

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon \iff a - b < 2\varepsilon.$$

Astfel pentru orice număr pozitiv $\forall \varepsilon > 0$ avem $a - b < 2\varepsilon$, ceea ce este posibil atunci și numai atunci când $a - b \leq 0$, adică $a \leq b$. □

Remarcă. Această teoremă ne arată, că dacă într-o inegalitate există limitele membrilor stâng și drept, atunci putem trece la limită în ea. În plus, dacă condițiile teoremei au loc într-o formă mai strictă: $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci în rezultatul trecerii la limită poate apărea egalitatea membrilor inecuației, adică $a \leq b$.

Reținem, deci că *la trecerea la limită într-o inegalitate strictă, trebuie să înlocuim semnul inegalității stricte ” < ” cu semnul inegalității slabe ” ≤ ”.*

Exemplu. Fie $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Avem $a_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $a = b = 0$.

2.2 Noțiuni de subsir. Teorema Bolzano - Weierstrass

2.2.1 Noțiuni de subsir. Limita subsirului unui șir convergent

Definiția 2.5. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir numeric, iar $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un șir strict crescător de numere naturale. Șirul $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se numește *subșir* al șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dacă $b_k = a_{n_k}$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$.

Șirul $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ în așa caz se notează simplu cu $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Se poate arăta că $n_k \geq k$ pentru toți $k \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, a_n = \frac{1}{n}$. Punem:

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{5}, b_4 = \frac{1}{7}, \dots$$

Astfel $b_k = a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.

Deci, dacă este dat un șir și din mulțimea termenilor lui este construit un șir nou, atunci acest șir se numește subsir al șirului dat dacă ordinea elementelor în el este aceeași ca și în șirul inițial.

De exemplu, dacă considerăm șirul

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots,$$

atunci

$$1, 3, 5, \dots, 2n + 1, \dots$$

este subșirul lui, pe când

$$2, 1, 3, 4, \dots$$

nu este subșirul lui.

Teorema 2.7. *Dacă un șir numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita a , atunci orice subșir al lui are aceeași limită.*

Demonstrație. În orice vecinătate a punctului a se conțin toți termenii șirului cu excepția primilor câțiva (un număr finit!) termeni. Dar atunci, în orice vecinătate a punctului a se conțin toți termenii oricărui subșir al acestui șir cu excepția doar a unui număr finit de termeni. Deci orice subșir al șirului convergent este convergent și are aceeași limită a . \square

Observație. Dacă un șir conține două subșiruri convergente cu limite diferite, atunci șirul este divergent.

2.2.2 Teorema Bolzano - Weierstrass despre extragerea unui subșir convergent dintr-un șir mărginit de numere reale

Teorema 2.8 (Bolzano - Weierstrass). *Din orice șir mărginit de numere reale se poate extrage un subșir convergent.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit de numere reale. Întrucât șirul este mărginit, există un segment $I_0 = [a, b]$ a.î. $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$.

Împărțim segmentul I_0 în jumătate și evident că cel puțin una din aceste jumătăți va conține o infinitate de termeni ai șirului dat. Notăm jumătatea respectivă cu

$$I_1 = [a_1, b_1], \quad |I_1| = \frac{b - a}{2}.$$

Fie x_{n_1} un termen al șirului dat, $x_{n_1} \in I_1$. Împărțim segmentul I_1 în jumătate și notăm cu

$$I_2 = [a_2, b_2], \quad |I_2| = \frac{b - a}{2^2}$$

acea jumătate care conține o infinitate de termeni ai șirului și fie x_{n_2} un termen arbitrar cu $x_{n_2} \in I_2$ și $n_2 > n_1$.

Prelungind acest proces nemărginit vom obține un șir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ care este subșir al șirului dat și așa încât

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Segmentele $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ formează un șir de segmente incluse lungimile cărora tind la zero

$$|I_k| = \frac{b - a}{2^k} \rightarrow 0 \quad \text{când } k \rightarrow \infty.$$

Conform principiului segmentelor incluse

$$\exists! c \text{ a.î. } a_k \leq c \leq b_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

și

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c.$$

Dar atunci în baza teoremei despre limita șirului intermediar avem că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c.$$

□

2.3 Operații cu șiruri convergente

2.3.1 Noțiune de șir infinit mic. Proprietățile șirurilor infinit mici

Definiția 2.6. Șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *infinit mic* dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Astfel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir infinit mic dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |a_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

De exemplu, șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{n}$ este un infinit mic.

Teorema 2.9. *Suma algebrică a unui număr finit de șiruri infinit mici este un șir infinit mic.*

Demonstrație. Fie $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri infinit mici. Trebuie să demonstrăm că $(\alpha_n + \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este infinit mic.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_1(\varepsilon),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_2(\varepsilon).$$

Fie $N_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci pentru orice $n \geq N_0$ ultimele inegalități au loc concomitent. Deci

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq N_0,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0.$$

□

Remarcă. Suma unui număr infinit de șiruri infinit mici poate să nu fie un șir infinit mic.

De exemplu, considerăm $\alpha_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Observăm că

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ termeni}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0,$$

iar

$$S'_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n^2 \text{ termeni}} = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \rightarrow \infty.$$

Teorema 2.10. *Produsul unui șir mărginit și a unui șir infinit mic este un șir infinit mic.*

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit, adică

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fie $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir infinit mic, atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Dar atunci, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ avem

$$|a_n \cdot \alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

ceea ce conform definiției înseamnă că șirul $(a_n \cdot \alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este infinit mic. □

Corolarul 1. *Produsul unui șir convergent și a unui șir infinit mic este un șir infinit mic.*

Corolarul 2. *Produsul a două șiruri infinit mici este un șir infinit mic.*

2.3.2 Noțiune de șir infinit mare

Definiția 2.7. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *infinit mare*, dacă

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |a_n| > M, \forall n \geq N(M).$$

Se notează

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că dacă vom lua un număr arbitrar $M > 0$ oricât de mare, atunci o infinitate de termeni ai șirului se află în exteriorul

segmentului $[-M, M]$, iar în interiorul acestui segment se află doar un număr finit de termeni.

Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir infinit mare și

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a_n > M, \forall n \geq N(M),$$

atunci notăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

iar dacă

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a_n < -M, \forall n \geq N(M),$$

atunci notăm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Exemple.

1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = n^2$ este un șir infinit mare: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

2. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n \cdot n$ este un șir infinit mare: $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot n = \infty$.

3. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$a_n = \begin{cases} n^2, & \text{pentru } n \text{ par;} \\ \frac{1}{n}, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

este un șir nemărginit, dar nu este infinit mare, deoarece în exteriorul oricărui segment $[-M, M]$ există o infinitate de termeni ai șirului, dar și în interiorul acestui segment de asemenea se conțin o infinitate de termeni ai șirului.

Teorema 2.11. *Dacă șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este infinit mic și toți termenii lui sunt nenuli, atunci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \frac{1}{\alpha_n}$ este infinit mare.*

Teorema 2.12. *Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este infinit mare, atunci șirul $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n = \frac{1}{a_n}$ este infinit mic.*

Exercițiu. Demonstrați teoremele 2.11 și 2.12.

2.3.3 Condiția necesară și suficientă ca un număr să fie limita unui șir

Teorema 2.13. *Pentru ca numărul a să fie limita șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este necesar și suficient ca termenul general al șirului să admită prezentarea în forma*

$$a_n = a + \alpha_n,$$

unde α_n este termenul general al unui șir infinit mic.

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Conform definiției limitei șirului numeric avem următoarele:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Punem $\alpha_n = a_n - a$. Și deci $|\alpha_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$, ceea ce înseamnă că $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir infinit mic.

Suficiența. Fie $a_n = a + \alpha_n$. Atunci $\alpha_n = a_n - a$ și în baza definiției șirului infinit mic avem

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } |\alpha_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Deci $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru toți $n \geq N(\varepsilon)$ ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

□

2.3.4 Operații cu șiruri convergente

Teorema 2.14. *Suma algebrică a două șiruri convergente este un șir convergent și în plus, dacă $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, atunci*

$$a_n + b_n \rightarrow a + b.$$

Demonstrație.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{ unde } \alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \iff b_n = b + \beta_n, \text{ unde } \beta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Deci

$$a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Fie $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$. Conform Teoremei 2.9 avem că $\gamma_n \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$. Deci

$$a_n + b_n = (a + b) + \gamma_n, \text{ unde } \gamma_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

ceea ce conform Teoremei 2.13 înseamnă că $a_n + b_n \rightarrow a + b$.

□

Teorema 2.15. *Produsul a două șiruri convergente este un șir convergent și în plus, dacă $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, atunci*

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b.$$

Demonstrație.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \quad \text{unde } \alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \iff b_n = b + \beta_n, \quad \text{unde } \beta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Deci

$$a_n \cdot b_n = a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

Fie $\gamma_n = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$. Conform Teoremelor 2.9 și 2.10 avem că $\gamma_n \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$. Deci

$$a_n \cdot b_n = a \cdot b + \gamma_n, \quad \text{unde } \gamma_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

ceea ce conform Teoremei 2.13 înseamnă că $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$.

□

Corolarul 1. Dacă $a_n \rightarrow a$, atunci pentru orice constantă C avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C \cdot a_n = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \cdot a,$$

adică factorul constant poate fi scos în fața semnelui de limită.

Corolarul 2. Dacă $a_n \rightarrow a$ și k este un număr natural fixat, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k = a^k.$$

Teorema 2.16. Dacă $a_n \rightarrow a$ și $b_n \rightarrow b$, $b \neq 0$, atunci

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Demonstrație.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \quad \text{unde } \alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \iff b_n = b + \beta_n, \quad \text{unde } \beta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Să calculăm diferența

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b + \beta_n)} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Putem considera $b > 0$ și atunci deoarece $b_n \rightarrow b$, există un rang n_0 așa încât

$$b_n > \frac{b}{2}, \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Prin urmare,

$$0 < \frac{1}{b(b + \beta_n)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} < \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{b} = \frac{2}{b^2},$$

deci șirul

$$\left(\frac{1}{b(b + \beta_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

este mărginit. Dar atunci șirul cu termenul general

$$\frac{1}{b \cdot b_n}(b\alpha_n - a\beta_n) = \gamma_n$$

este infinit mic și prin urmare

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \rightarrow 0.$$

□

2.3.5 Nedeterminări

În cele de mai sus, nu am cercetat șirurile infinit mari și nici cazul când la calculul limitei cântului a două șiruri, limita numitorului este egală cu 0.

Teorema 2.17.

$$(a_n \rightarrow -\infty \text{ și } b_n \rightarrow b, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow -\infty$$

$$(a_n \rightarrow +\infty \text{ și } b_n \rightarrow b, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$$

$$(a_n \rightarrow -\infty \text{ și } b_n \rightarrow -\infty) \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow -\infty$$

$$(a_n \rightarrow +\infty \text{ și } b_n \rightarrow +\infty) \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty.$$

Remarca 1. Se consideră lipsită de sens expresia

$$+\infty - \infty,$$

care se numește *nedeterminare*.

Exemple.

$$1. a_n = n^2 + n \rightarrow +\infty, b_n = -n^2 \rightarrow -\infty : a_n + b_n \rightarrow [+\infty - \infty] = n \rightarrow +\infty.$$

$$2. a_n = n^2 \rightarrow +\infty, b_n = -n^2 + 3 \rightarrow -\infty : a_n + b_n \rightarrow [+\infty - \infty] = 3.$$

$$3. a_n = n^2 \rightarrow +\infty, b_n = -n^2 + \frac{1}{n} \rightarrow -\infty : a_n + b_n \rightarrow [+\infty - \infty] = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

4. $a_n = n^2 \rightarrow +\infty, b_n = -n^2 + (-1)^n \rightarrow -\infty : a_n + b_n \rightarrow [+\infty - \infty] = (-1)^n$, șirul nu are limită.

Teorema 2.18.

$$(a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow b, b > 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$$

$$(a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow b, b < 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$$

$$(a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b, b > 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$$

$$(a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b, b < 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$$

$$(a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow +\infty) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$$

$$(a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow -\infty) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$$

$$(a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow -\infty) \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty.$$

Remarca 2. Se consideră lipsită de sens expresia

$$0 \cdot \infty,$$

care se numește *nedeterminare*.

Exemple.

$$1. a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, b_n = n \rightarrow +\infty : a_n \cdot b_n \rightarrow [0 \cdot \infty] = 1.$$

$$2. a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, b_n = n^2 \rightarrow +\infty : a_n \cdot b_n \rightarrow [0 \cdot \infty] = n \rightarrow +\infty.$$

$$3. a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, b_n = n \rightarrow +\infty : a_n \cdot b_n \rightarrow [0 \cdot \infty] = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Teorema 2.19.

$$(a_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow \infty) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

$$(a_n \rightarrow a, a > 0, b_n \rightarrow 0) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } b_n > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b_n < 0. \end{cases}$$

Remarca 3. Se consideră lipsite de sens expresiile

$$\frac{0}{0} \text{ și } \frac{\infty}{\infty}.$$

Exemple.

$$1. a_n = n \rightarrow +\infty, b_n = n^2 \rightarrow +\infty : \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$$2. a_n = n \rightarrow +\infty, b_n = 2n \rightarrow +\infty : \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{2}.$$

$$3. a_n = n \rightarrow +\infty, b_n = (-1)^n \cdot n \rightarrow \infty : \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = (-1)^n - \text{nu are limită.}$$

$$4. a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, b_n = \frac{1}{n^3} \rightarrow 0 : \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \left[\frac{0}{0} \right] = n \rightarrow +\infty.$$

$$5. a_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, b_n = \frac{2}{n^2} \rightarrow 0 : \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2}.$$

Exercițiu. Fie că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, iar șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent. Ce puteți afirma despre comportarea șirurilor $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Argumentați răspunsul.

2.4 Șiruri monotone de numere reale. Convergența lor

2.4.1 Marginea superioară și marginea inferioară a unui șir. Șiruri monotone

Definiția 2.8. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit de numere reale. *Marginea superioară (inferioară) a șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$* se numește marginea superioară (inferioară) a mulțimii valorilor

termenilor șirului. Se notează

$$\sup_n a_n \quad (\text{corespunzător } \inf_n a_n).$$

Deci, numărul β este marginea superioară a șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dacă și numai dacă

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \beta$,
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $a_{N(\varepsilon)} > \beta - \varepsilon$.

Numărul α este marginea inferioară a șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dacă și numai dacă

1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq \alpha$,
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $a_{N(\varepsilon)} < \alpha + \varepsilon$.

Definiția 2.9. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește:

- *strict crescător*, dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$;
- *crescător*, dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$;
- *strict descrescător*, dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$;
- *descrescător*, dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.

Șirul care aparține oricărei din clasele menționate mai sus se numește *șir monoton*.

Exemple.

- a) $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ este un șir strict crescător.
- b) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n, \dots$ este un șir crescător.
- c) $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ nu este șir monoton.

2.4.2 Teorema despre existența limitei unui șir monoton

Teorema 2.20. *Orice șir numeric crescător mărginit superior are limită egală cu marginea superioară a lui.*

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir crescător, mărginit superior și fie $\sup_n a_n = \beta$. Fixăm în mod arbitrar numărul pozitiv ε . Din faptul că β este marginea superioară a șirului rezultă că

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad a_{N(\varepsilon)} > \beta - \varepsilon,$$

iar deoarece șirul este crescător, avem

$$a_n \geq a_{N(\varepsilon)}, \forall n > N(\varepsilon).$$

Așadar, $\forall n > N(\varepsilon)$:

$$\beta - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a_n \leq \beta < \beta + \varepsilon,$$

adică

$$|a_n - \beta| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

ceea ce înseamnă că $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

□

Teorema 2.21. *Orice șir numeric descrescător mărginit inferior are limită egală cu marginea inferioară a lui.*

Teorema 2.22. *Orice șir numeric monoton și mărginit de numere reale este convergent.*

2.4.3 Numărul e

Să cercetăm șirul numeric $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu termenul general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Să demonstraăm că acest șir are limită. Mai întâi vom transforma termenul general aplicând formula binomului lui Newton

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \dots k} a^{n-k} b^k + \dots + \\ &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \dots n} b^n. \end{aligned}$$

Astfel

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right); \\ a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Observăm că fiecare termen din expresia pentru a_{n+1} este mai mare decât termenul corespunzător din expresia pentru a_n și în plus, a_{n+1} conține cu un termen pozitiv mai mult decât a_n . Prin urmare

$$a_n < a_{n+1}.$$

Să ne convingem, că șirul dat este mărginit. Observăm că

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Așadar, șirul

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, \dots$$

este strict ctrescător și mărginit superior, și deci convergent. Limita acestui șir se notează cu e grație matematicianului, mecanicianului, astronomului și fizicianului elvețian *Leonhard Euler* (Basel, 15.04.1707 - Sankt Petersburg, 18.09.1783).

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\dots$$

e este un număr transcendent, fapt care pentru prima dată a fost demonstrat în anul 1873 de către matematicianul francez *Charles Hermite* (Dieuze, 24.12.1822 - Paris, 14.01.1901).

2.4.4 Limita superioară și limita inferioară a unui șir

Din termenii unui șir de numere reale putem alcătui o infinitate de subșiruri. În cazul când subșirul extras este convergent, limita lui se numește *limită parțială a șirului dat*. Conform teoremei Bolzano - Weierstrass orice șir are cel puțin o limită parțială finită sau infinită. De aici reiese că orice șir poate avea mai multe limite parțiale și o importanță deosebită au cea mai mare și cea mai mică limită parțială. Deoarece șirurile sunt considerate în $\overline{\mathbb{R}}$, cea mai mare limită parțială poate fi $+\infty$, iar cea mai mică $-\infty$.

Definiția 2.10. Se numește *limită superioară a șirului* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cea mai mare limită parțială a lui și se notează

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ sau } \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Definiția 2.11. Se numește *limită inferioară a șirului* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cea mai mică limită parțială a lui și se notează

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ sau } \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Din aceste definiții rezultă

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\},$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Observăm că limita superioară este limita unui șir descrescător și deci va coincide cu marginea inferioară a mulțimii termenilor șirului $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $b_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$, adică

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k.$$

La fel, se observă că limita inferioară este limita unui șir crescător și deci va coincide cu marginea superioară a mulțimii termenilor șirului $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $c_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$, adică

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Exemple.

1) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

2) $a_n = (-1)^n \cdot n, n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Teorema 2.23. *Orice șir de numere reale are limită superioară și limită inferioară în $\overline{\mathbb{R}}$.***Teorema 2.24.** *Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale este convergent dacă și numai dacă este mărginit și*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Următoarea teoremă exprimă condițiile necesare și suficiente ca un număr dat să fie limita superioară a unui șir dat.

Teorema 2.25. *Pentru ca numărul a să fie limita superioară a șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este necesar și suficient ca pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ să fie satisfăcute următoarele condiții:*

i) $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n < a + \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$,

ii) $\forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists N'(\varepsilon, N_0) \in \mathbb{N}$ a.î. $N' > N_0$ și $a_{N'} > a - \varepsilon$.

Prima condiție din punct de vedere geometric exprimă faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, o submulțime infinită de termeni ai șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfac condiția $a_n < a + \varepsilon$ și numai o mulțime finită de termeni poate satisface condiția $a_n \geq a + \varepsilon$.Condiția a doua înseamnă că pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat există o submulțime infinită de termeni ai șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care satisfac condiția $a_n > a - \varepsilon$.

2.5 Șiruri Cauchy

2.5.1 Noțiune de șir Cauchy. Mărginirea unui șir Cauchy

Definiția 2.12. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește *șir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și $m > N(\varepsilon)$ să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.**Teorema 2.26.** *Orice șir Cauchy de numere reale este mărginit.***Demonstrație.** Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir Cauchy. Atunci $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m > N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon).$$

Fie $\varepsilon = 1$ și notăm $n_0 = N(1) + 1$. Atunci putem lua $m = n_0$ și deci avem $|a_n - a_{n_0}| < 1$, $\forall n > N(1)$. Deci

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| = M_0, \forall n > N(1).$$

Fie $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N(1)}|, M_0\}$. Atunci $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit. □

2.5.2 Criteriul lui Cauchy de convergență a șirurilor de numere reale

Teorema 2.27. *Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale este convergent dacă și numai dacă este un șir Cauchy.*

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N(\varepsilon).$$

Dacă $m > N(\varepsilon)$ atunci $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Astfel pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și orice $m > N(\varepsilon)$ avem

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este fundamental.

Suficiența. Fie că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy. Conform Teoremei 2.26 el este mărginit, iar conform Teoremei Bolzano -Weierstrass din el putem extrage un subșir convergent $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ și fie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Dar atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k > K(\varepsilon).$$

Din faptul că șirul dat este un șir Cauchy, pentru numărul ε deja fixat vom găsi un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $N_0 = \max\{n_{K(\varepsilon)}, N(\varepsilon)\}$, atunci pentru toți $n > N_0$ și $n_k > N_0$ avem

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. □

Capitolul 3

Limita și continuitatea funcției de o variabilă reală

3.1 Limita unei funcții într-un punct

3.1.1 Noțiune de punct de acumulare pentru o mulțime. Exemple

Definiția 3.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se numește *punct de limită* sau *punct de acumulare* pentru mulțimea I , dacă în orice vecinătate a acestui punct se conțin puncte din mulțimea I diferite de x_0 , adică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in I, y \neq x_0 \quad \text{a.î.} \quad |y - x_0| < \varepsilon.$$

Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii I se numește *mulțime derivată* și se notează cu I' .

Exemple.

- 1) Fie $I = [0, 1]$. Mulțimea derivată este $I' = I$.
- 2) Pentru mulțimea $I = (0, 1] \cup \{2\}$ mulțimea derivată este segmentul $[0, 1]$.
- 3) Pentru mulțimea $I = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ mulțimea derivată este $I' = \{0\}$.
- 4) Mulțimea $I = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100} \right\}$ nu are puncte de limită, $I' = \emptyset$.

Remarcă. Punctul de limită a unei mulțimi poate să aparțină sau să nu aparțină mulțimii.

Definiția 3.2. Un punct $x \in I$ se numește *punct izolat al mulțimii I* dacă el nu este punct de acumulare pentru această mulțime, adică dacă există o vecinătate a lui în care nu se conțin alte puncte din I .

Teorema 3.1. Fie x_0 este un punct de acumulare pentru mulțimea $I \subset \mathbb{R}$. Atunci există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din I diferite de x_0 care converge la x_0 , adică:

- 1) $\forall n \geq 1, \exists x_n \in I, x_n \neq x_0,$
 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ și x_0 este un punct de acumulare pentru I . Vom nota cu $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$ vecinătatea găurită a punctului x_0 :

$$\dot{U}(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Pe viitor vom studia funcțiile $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \neq \emptyset$.

3.1.2 Definiția limitei funcției de o variabilă reală într-un punct în sensul lui Cauchy și în sensul lui Heine

Definiția 3.3 (Definiția limitei funcției într-un punct în sensul lui Cauchy, definiția în termenii $\varepsilon - \delta$). Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea $I \subset \mathbb{R}$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Numărul $A \in \mathbb{R}$ se numește *limita funcției f în punctul x_0* , dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru toate punctele $x \in I \cap \dot{U}(x_0, \delta)$ are loc inegalitatea

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Se notează

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ sau } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0.$$

Deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in I, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

sau

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U(A, \varepsilon), \exists \dot{U}(x_0, \delta) \text{ a.î. } f(I \cap \dot{U}(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon).$$

Remarcă. Definiția limitei unei funcții se dă într-un punct de acumulare al mulțimii de definiție I , adică într-un punct pentru care avem asigurată posibilitatea de a ne apropia de el prin puncte din mulțimea pe care este definită funcția f .

Exemplu. Demonstrați că funcția $f(x) = 3x - 1$ are limita egală cu 5 în punctul $x_0 = 2$.

Soluție. Fixăm în mod arbitrar numărul $\varepsilon > 0$. Trebuie să găsim un așa număr $\delta > 0$ încât, pentru toți $x \neq 2$ cu $|x - 2| < \delta$ să aibă loc inegalitatea $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$. Să cercetăm relația $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$ și să o rezolvăm în raport cu $|x - 2|$. Avem

$$|(3x - 1) - 5| < \varepsilon \iff |3x - 6| < \varepsilon \iff |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Astfel dacă pentru numărul arbitrar fixat $\varepsilon > 0$ vom lua $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$, atunci pentru toate punctele $x \neq 2$ cu $|x - 2| < \delta$ va avea loc inegalitatea $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$, ceea ce conform definiției limitei funcției înseamnă că

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5.$$

Definiția 3.4. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea $I \subset \mathbb{R}$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că funcția $f(x)$ are limita $+\infty$ în punctul x_0 , dacă

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 \quad \text{a.î.} \quad f(x) > M, \quad \forall x \in I \cap \dot{U}(x_0, \delta).$$

Definiția 3.5. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea $I \subset \mathbb{R}$ și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că funcția $f(x)$ are limita $-\infty$ în punctul x_0 , dacă

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 \quad \text{a.î.} \quad f(x) < -M, \quad \forall x \in I \cap \dot{U}(x_0, \delta).$$

Definiția 3.6. Fie $x_0 = +\infty$ un punct de acumulare pentru mulțimea I . Numărul A se numește limita funcției $f(x)$ când $x \rightarrow +\infty$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in I, x > \Delta.$$

Definiția 3.7 (Definiția limitei funcției într-un punct în sensul lui Heine, definiția cu șiruri). Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulțimea $I \subset \mathbb{R}$ (posibil $x_0 = -\infty$ sau $x_0 = +\infty$). Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Numărul A (posibil $A = -\infty$ sau $A = +\infty$) se numește limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice șir de puncte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \neq x_0$ convergent la x_0 ($x_n \rightarrow x_0$, $n \rightarrow +\infty$) șirul corespunzător de valori ale funcției converge la A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

3.1.3 Echivalența definițiilor limitei unei funcții într-un punct în sensul lui Cauchy și în sensul lui Heine

Teorema 3.2. Definițiile limitei funcției într-un punct în sensul lui Heine și în sensul lui Cauchy sunt echivalente.

Demonstrație. Echivalența a două afirmații D și D' înseamnă că dacă este adevărată afirmația D , atunci este adevărată și afirmația D' și invers.

Fie că numărul A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiției lui Heine, adică pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$ avem $f(x_n) \rightarrow A$. Trebuie să arătăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \forall x \in I : 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vom admite contrariul, fie că A nu este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiției lui Cauchy, adică

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{a.î.} \quad \forall \delta > 0, \exists x_\delta \neq x_0, |x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{și} \quad |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon.$$

Vom alege în mod arbitrar un șir $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\delta_n > 0$ convergent la 0, d.e. $\delta_n = \frac{1}{n}$. Atunci pentru fiecare δ_n (deci pentru fiecare n) se va găsi un astfel de punct x_n încât $x_n \neq x_0$ și $|x_n - x_0| < \delta_n$ și

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Deoarece $\delta_n \rightarrow 0$, rezultă că $x_n \rightarrow x_0$, dar din (3.1) rezultă că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu converge la A , dar aceasta contrazice faptul că A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiției lui Heine. Contradicția obținută demonstrează afirmația.

Fie acum că A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiției lui Cauchy. Atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in I, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \quad (3.2)$$

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir arbitrar convergent la x_0 , $x_n \neq x_0$. Dar atunci, pentru numărul $\delta = \delta(\varepsilon)$ vom găsi un rang $N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^*$ așa încât

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n > N(\delta).$$

Dar atunci în baza condiției (3.2) vom avea că

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\delta),$$

dar aceasta și înseamnă că $f(x_n) \rightarrow A, n \rightarrow \infty$, adică numărul A este limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiției lui Heine. □

3.2 Proprietățile funcțiilor care au limită într-un punct

3.2.1 Unicitatea limitei funcției într-un punct

Teorema 3.3. *Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în punctul $x_0 \in I'$, atunci această limită este unică.*

Demonstrație. Admitem contrariul și anume că funcția $f(x)$ în punctul x_0 are două limite diferite A și A' . Și fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ și $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$. Atunci șirul valorilor corespunzătoare ale funcției $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ar trebui să aibă două limite diferite A și A' , dar aceasta este imposibil, deoarece dacă un șir numeric are limită, atunci ea este unică. □

Remarcă. Dacă putem construi două șiruri de puncte $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x'_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x''_n \in I \setminus \{x_0\}$ convergente la x_0 astfel încât șirurile corespunzătoare de valori ale funcției $(f(x'_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(f(x''_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ au limite diferite sau în general nu au limită, atunci funcția $f(x)$ nu are limită în punctul x_0 .

Exemplu. Să arătăm că funcția $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$. Fie $x'_n = \frac{1}{n\pi}$, $x'_n \rightarrow 0$,

$$f(x'_n) = \sin n\pi = 0.$$

Fie $x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x''_n \rightarrow 0$,

$$f(x''_n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Am determinat astfel două șiruri de puncte convergente la 0 pentru care șirurile valorilor corespunzătoare ale funcției converg la limite diferite. Prin urmare,

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

3.2.2 Limite laterale

Fie funcția $f(x)$ este definită pe intervalul $a < x < x_0$.

Definiția 3.8. Vom spune că numărul A_s este *limita la stânga a funcției $f(x)$ în punctul x_0* și vom nota

$$A_s = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

dacă pentru orice șir de puncte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a < x_n < x_0$, $x_n \rightarrow x_0$ șirul corespunzător de valori ale funcției $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge la A_s .

Sau echivalent în termenii ” $\varepsilon - \delta$ ”

$$A_s = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A_s| < \varepsilon, \forall x \text{ cu } x_0 - \delta < x < x_0.$$

Fie funcția $f(x)$ este definită pe intervalul $x_0 < x < a$.

Definiția 3.9. Vom spune că numărul A_d este *limita la dreapta a funcției $f(x)$ în punctul x_0* și vom nota

$$A_d = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

dacă pentru orice șir de puncte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_0 < x_n < a$, $x_n \rightarrow x_0$ șirul corespunzător de valori ale funcției $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge la A_d .

Sau echivalent în termenii "ε - δ"

$$A_d = f(x_0+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A_d| < \varepsilon, \forall x \text{ cu } x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Exemplu.

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -1, \quad f(0+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = 1.$$

Teorema 3.4. Pentru ca funcția $f(x)$ definită pe un interval I care conține punctul x_0 să aibă limita A în acest punct este necesar și suficient ca în acest punct să existe limita la stânga și limita la dreapta a funcției date și să aibă loc egalitatea

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A.$$

Demonstrație. *Necesitatea.* Dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

atunci din definiția limitei funcției imediat rezultă că $A_s = A_d = A$.

Suficiența.

$$A = A_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta_1.$$

$$A = A_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x_0 - \delta_2 < x < x_0.$$

Punem $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$. Atunci pentru toți $x \in I$, $x \neq x_0$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ va avea loc inegalitatea $|f(x) - A| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $f(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow x_0$.

□

3.2.3 Mărginirea și păstrarea semnului unei funcții care are limită într-un punct

Teorema 3.5. Dacă funcția $f(x)$ are limita finită A în punctul x_0 , atunci într-o vecinătate perforată $\dot{U}(x_0)$ funcția $f(x)$ este mărginită, adică

$$\exists M > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x)| \leq M, \forall x \in \dot{U}(x_0).$$

Demonstrație.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta).$$

Punem $\varepsilon = 1$, atunci $|f(x) - A| < 1, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta)$, iar

$$|f(x)| = |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| = M, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta).$$

□

Teorema 3.6. *Dacă $f(x) \rightarrow A$, $x \rightarrow x_0$ și A este un număr nenul finit, atunci există o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ așa încât:*

$$i) A > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2}, \forall x \in \dot{U}(x_0),$$

$$ii) A < 0 \Rightarrow f(x) < \frac{A}{2}, \forall x \in \dot{U}(x_0).$$

Demonstrație.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta).$$

Fie $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Atunci

$$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta) \iff A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}, \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta).$$

Dacă $A > 0$, atunci $f(x) > \frac{A}{2}$. Dacă $A < 0$, atunci $f(x) < \frac{A}{2}$.

□

Remarcă. Dacă funcția $f(x)$ are în punctul x_0 limită finită nenulă, atunci există o vecinătate a acestui punct în care toate valorile funcției au același semn ca și cel al limitei funcției, adică funcția își păstrează semnul într-o vecinătate găurită a lui x_0 .

3.2.4 Teorema despre trecerea la limită în inegalități

Din definiția limitei funcției într-un punct în sensul lui Heine și din proprietățile sirurilor convergente imediat se obțin unele proprietăți utile ale funcțiilor ce au limită într-un punct.

Teorema 3.7. *Dacă*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A_1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A_2$$

și într-o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ avem $f_1(x) \leq f_2(x)$, atunci $A_1 \leq A_2$.

3.2.5 Teorema despre limita unei funcții intermediare

Teorema 3.8. Fie funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$ și $\varphi(x)$ definite într-o anumită vecinătate $\dot{U}(x_0)$ și pe ea avem

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x).$$

Dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A,$$

atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$$

3.2.6 Teoremele despre limita sumei, produsului, câtului a două funcții care au limită într-un punct

Teorema 3.9. Fie $f(x)$ și $g(x)$ două funcții definite într-o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ și fie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B,$$

unde A și B sunt numere finite. Atunci funcțiile $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ au limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B, \quad (3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B. \quad (3.4)$$

Dacă în plus $B \neq 0$, atunci și funcția $\frac{f(x)}{g(x)}$ are limită în x_0 și în plus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}. \quad (3.5)$$

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir arbitrar de puncte din $\dot{U}(x_0)$ convergent la x_0 . Atunci șirurile corespunzătoare $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ și $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converg corespunzător la A și B . Conform proprietăților șirurilor numerice convergente, avem

$$f(x_n) \pm g(x_n) \rightarrow A \pm B,$$

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \rightarrow A \cdot B.$$

Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a fost ales arbitrar obținem egalitățile (3.3) și (3.4).

Pentru a obține (3.5) observăm că deoarece $B \neq 0$, $\exists \dot{U}(x_0)$ a. î. $g(x) \neq 0, \forall x \in \dot{U}(x_0)$. Dar atunci pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in \dot{U}(x_0)$, $x_n \rightarrow x_0$ avem $f(x_n) \rightarrow A$, $g(x_n) \rightarrow B \neq 0$, $g(x_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și din teorema despre limita câtului a două șiruri convergente obținem (3.5).

□

Teorema 3.10. *Dacă într-o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ funcția $f(x)$ satisface condiția:*

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } |f(x)| > M,$$

iar pentru funcția $g(x)$ avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \quad g(x) \neq 0, \forall x \in \dot{U}(x_0),$$

atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Teorema 3.11. *Dacă într-o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ funcția $f(x)$ satisface condiția:*

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } |f(x)| < M,$$

iar pentru funcția $g(x)$ avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3.3 Funcții infinit mici. Limita funcției compuse

3.3.1 Definiția funcției infinit mici într-un punct. Proprietățile funcțiilor infinit mici

În cele de mai jos vom considera că toate funcțiile sunt definite pe o vecinătate găurită a punctului x_0 .

Definiția 3.10. Funcția $\alpha(x)$ se numește *infinit mică în punctul x_0* (când $x \rightarrow x_0$) dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Exemple.

- i) Funcția $f(x) = (x - 3)^2$ este infinit mică când $x \rightarrow 3$.
- ii) Funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ este infinit mică când $x \rightarrow \infty$.

Teorema 3.12. *Suma și produsul unui număr finit de funcții infinit mici în punctul x_0 sunt funcții infinit mici în x_0 .*

Produsul unei funcții infinit mici în punctul x_0 și a unei funcții mărginite în acest punct este o funcție infinit mică în x_0 .

3.3.2 Condiția necesară și suficientă ca un număr dat să fie limita unei funcții într-un punct

Teorema 3.13. Pentru ca numărul A să fie limita funcției $f(x)$ în punctul x_0 este necesar și suficient ca funcția $f(x)$ în vecinătatea punctului x_0 să poată fi prezentată în forma

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

unde $\alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$.

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - A) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - A = A - A = 0.$$

Deci

$$f(x) - A = \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0.$$

Suficiența. Fie $f(x) = A + \alpha(x)$, unde $\alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0$. Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

Q.E.D.

3.3.3 Teorema despre limita funcției compuse

Fie că funcția $f(x)$ este definită într-o vecinătate găurită $\dot{U}(x_0)$ a punctului x_0 , iar funcția $F(y)$ este definită pe mulțimea valorilor funcției $f(x)$. Atunci pe $\dot{U}(x_0)$ este definită funcția compusă $F(f(x))$.

Teorema 3.14. *Dacă există*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad \text{și} \quad f(x) \neq b \quad \text{pentru} \quad x \neq x_0,$$

și există

$$\lim_{y \rightarrow b} F(y) = A,$$

atunci funcția compusă $F(f(x))$ are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} F(y) = A.$$

Demonstrație. Întrucât $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, funcția $f(x)$ este definită într-o vecinătate găurită a punctului x_0 și pentru orice număr $\varepsilon > 0$ se va găsi un așa $\delta > 0$ încât

$$f(\dot{U}(x_0, \delta)) \subset U(b, \varepsilon),$$

și conform ipotezei, pentru $x \neq x_0$ avem $f(x) \neq b$.

Întrucât $\lim_{y \rightarrow b} F(y) = A$, funcția $F(y)$ este definită pe o vecinătate perforată a lui b și deci pe $\dot{U}(x_0, \delta)$ are sens funcția compusă $F(f(x))$.

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir arbitrar, astfel încât $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in \dot{U}(x_0, \delta)$ și fie $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Conform ipotezei $y_n \neq b, n = 1, 2, \dots$. Deoarece $F(y) \rightarrow A, y \rightarrow b$ concludem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = A.$$

Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a fost ales în mod arbitrar rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(f(x)) = A.$$

□

3.3.4 Criteriul lui Cauchy de existență a limitei unei funcții într-un punct

Teorema 3.15. *Pentru ca o funcție $f(x)$ să aibă limită finită în punctul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este necesar și suficient ca pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ să existe un așa număr $\delta(\varepsilon) > 0$ încât pentru orice puncte $x' \in \dot{U}(x_0, \delta)$ și $x'' \in \dot{U}(x_0, \delta)$ să aibă loc inegalitatea*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie că $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A \in \mathbb{R}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o δ – vecinătate găurită a punctului x_0 așa încât

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in \dot{U}(x_0, \delta).$$

Deci, pentru orice puncte $x', x'' \in \dot{U}(x_0, \delta)$ avem

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suficiența. Fie că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un așa număr $\delta(\varepsilon) > 0$ încât pentru orice puncte $x' \in \dot{U}(x_0, \delta)$ și $x'' \in \dot{U}(x_0, \delta)$ are loc inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Considerăm un șir arbitrar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots$ și $x_n \rightarrow x_0$, când $n \rightarrow \infty$. Să arătăm că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent. Conform criteriului lui Cauchy de convergență a șirurilor numerice, din convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ rezultă că pentru numărul δ , există un rang $N(\delta) \in \mathbb{N}$ așa încât

$$x_n \in \dot{U}(x_0, \delta), \forall n > N(\delta).$$

Dar atunci pentru toți $n > N(\delta)$ și $m > N(\delta)$ vom avea că

$$x_n \in \dot{U}(x_0, \delta) \text{ și } x_m \in \dot{U}(x_0, \delta)$$

și deci

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

dar aceasta înseamnă că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este șir Cauchy și deci este convergent. Fie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Considerăm un alt șir $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n^* \neq x_0$ și $x_n^* \rightarrow x_0$. Să ne convingem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) = A.$$

Cu acest scop construim șirul $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} x_n, & \text{dacă } n = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots \\ x_n^*, & \text{dacă } n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Evident că $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$ și $\tilde{x}_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots$. Dar atunci, după cum am demonstrat mai sus șirul $(f(\tilde{x}_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și deoarece limita oricărui șir convergent coincide cu limita oricărui subșir al său deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Dar atunci, conform definiției limitei funcției în sensul lui Heine avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

□

Remarcă. Dacă x_0 este un număr finit, atunci condițiile Cauchy pot fi scrise astfel:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \text{ pt toți } x', x'' : |x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta.$$

3.4 Calculul limitelor funcțiilor

3.4.1 Calculul limitelor funcțiilor raționale întregi, funcțiilor fracționar- raționale, trigonometrice

Pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ avem $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. Dar atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot x^m = k \cdot x_0^m.$$

Prin urmare, dacă $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ este un polinom de grad n , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_n(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

Deci

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

Exemple.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2) = 9 + 2 = 11.$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty.$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = -\infty.$

Fie $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ un polinom de grad m . Se cere de calculat

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Dacă $Q(x_0) \neq 0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}.$$

Dacă $Q_m(x_0) = 0$, atunci raționamentele se complică. Așa, de exemplu, dacă $P_n(x_0) \neq 0$, atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

pot fi diferite și egale ori cu $+\infty$ ori cu $-\infty$.

Dacă $P_n(x_0) = 0$, atunci funcția rațională $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ poate fi simplificată prin factorul comun $x - x_0$ al polinoamelor.

Exemple.

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 2} = \frac{4 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{2}{0}, \text{ să calculăm limitele laterale}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{2}{-0} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2.$$

$$iv) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Din definițiile și proprietățile funcțiilor trigonometrice rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \quad x_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \operatorname{ctg} x = +\infty.$$

3.4.2 Prima limită remarcabilă

Să demonstrăm *prima limită remarcabilă*.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Fie $x > 0$. Construim cercul unitate și unghiul de mărime x . Avem

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{sect.}AOB} < S_{\triangle AOC}.$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB) = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{\text{sect.}AOB} = \frac{1}{2} R^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot AO \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Deci

$$0 < \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Deoarece $0 < x < \frac{\pi}{2}$ avem $\sin x > 0$. Și deci

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

sau

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Întrucât

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

putem aplica teorema despre limita funcției intermediare, conform căreia avem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Deoarece funcțiile $\cos x$ și $\frac{\sin x}{x}$ sunt funcții pare deducem că

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

și deci definitiv obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Aplicând teorema despre limita funcției compuse obținem formula

$$\lim_{\star \rightarrow 0} \frac{\sin \star}{\star} = 1.$$

Exemple.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3.$$

3.4.3 Existența limitei unei funcții monotone

Fie dată o funcție $f(x)$ definită pe o mulțime $E \subset \mathbb{R}$. Funcția $f(x)$ se numește *monoton crescătoare* (corespunzător *descrescătoare*) pe mulțimea E , dacă pentru orice puncte $x_1, x_2 \in E$ așa încât $x_1 < x_2$ are loc inegalitatea

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{coresp. } f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Teorema 3.16. *Dacă funcția $f(x)$ este monoton crescătoare pe intervalul (a, b) , atunci în punctele a și b există limitele laterale ale funcției și anume*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x).$$

Dacă funcția $f(x)$ este monoton descrescătoare pe (a, b) , atunci

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf_{x \in (a, b)} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

Demonstrație. Fie că funcția $f(x)$ este monoton crescătoare pe intervalul (a, b) . Și fie $A = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$. Sunt posibile două cazuri: A este un număr finit ori $A = +\infty$.

Dacă A este un număr finit, atunci

1. $\forall x \in (a, b) : f(x) \leq A$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in (a, b) : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon$.

Fie $\delta = b - x_\varepsilon$, atunci în baza monotoniei funcției $f(x)$ avem că pentru orice x așa încât $x_\varepsilon < x < b$ avem

$$A - \varepsilon < f(x_\varepsilon) < f(x).$$

Dar

$$x_\varepsilon < x < b \Leftrightarrow b - \delta < x < b$$

și deci

$$\forall x, b - \delta < x < b \text{ avem } A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon,$$

adică

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A.$$

Dacă $\sup_{x \in (a, b)} f(x) = +\infty$, atunci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ fixat există un punct $x_\varepsilon \in (a, b)$ așa încât

$$f(x_\varepsilon) > \varepsilon.$$

Punem $\delta = b - x_\varepsilon$ și atunci pentru orice $b - \delta < x < b$ avem

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \varepsilon,$$

dar aceasta, conform definiției, înseamnă că

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty.$$

Analogic se demonstrează și celelalte afirmații ale teoremei. □

Corolar. Dacă funcția $f(x)$ este monotonă pe un interval (a, b) , atunci în fiecare punct $x_0 \in (a, b)$ există limitele laterale

$$f(x_0 - 0) \text{ și } f(x_0 + 0)$$

și aceste limite sunt finite.

3.4.4 Formula fundamentală pentru numărul e

Amintim că mai devreme am demonstrat formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Să considerăm funcția

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

definită pentru orice $x \neq 0$ și să demonstrăm că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.6}$$

Pentru aceasta trebuie să demonstrăm că

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (3.7)$$

și

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (3.8)$$

Să demonstrăm (3.7). Cu acest scop considerăm un șir arbitrar de puncte $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$. Deci, putem considera $x_k > 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Fie $n_k = [x_k]$, atunci $\forall k \in \mathbb{N}$ avem

$$n_k \leq x_k < n_k + 1. \quad (3.9)$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_k + 1} &< \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k}, \\ 1 + \frac{1}{n_k + 1} &< \frac{1}{x_k} + 1 \leq 1 + \frac{1}{n_k}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Din (3.9) și (3.10) avem

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Evident că, atunci când $k \rightarrow \infty$ odată cu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vor converge la $+\infty$ și șirurile $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ și $(n_k + 1)_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \right] \frac{1}{1 + \frac{1}{n_k + 1}} = \frac{e}{1 + 0} = e.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) = e \cdot (1 + 0) = e.$$

Dar atunci conform teoremei despre limita șirului intermediar rezultă că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

Deoarece șirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a fost ales în mod arbitrar concludem că are loc (3.7).

Pentru a demonstra (3.8) vom pune $x = -y$, dar atunci dacă $x \rightarrow -\infty$, atunci $y \rightarrow +\infty$ și deci avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \right] = e \cdot (1 + 0) = e. \end{aligned}$$

Prin urmare formula (3.6) este demonstrată. Această formulă se numește *a doua limită remarcabilă*.

3.4.5 Unele consecințe din formula fundamentală pentru numărul e

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Într-adevăr,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a e.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Intr-adevăr, notăm $a^x - 1 = t$, atunci $x = \log_a(1+t)$ și când $x \rightarrow 0$, avem $t \rightarrow 0$, deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(1+x)^\alpha} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha. \end{aligned}$$

Exemple.

i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} \cdot \frac{4x}{\sin x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{4x} \cdot 4}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 \cdot 4}{1} = 4.$$

ii) Calculați limita

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}.$$

Facem substituția $x - 1 = t$, atunci $x = t + 1$. Dacă $x \rightarrow 1$, atunci $t \rightarrow 0$. Astfel obținem

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{10-t-1}}{\sin 3\pi(t+1)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9-t}}{\sin(3\pi t + 3\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(3 - \sqrt{9-t})(3 + \sqrt{9-t})}{(3 + \sqrt{9-t}) \cdot (-\sin 3\pi t)} = \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(3 + \sqrt{9-t}) \frac{\sin 3\pi t}{3\pi t} \cdot 3\pi t} = -\frac{1}{6 \cdot 3\pi} = -\frac{1}{18\pi}. \end{aligned}$$

3.5 Studiul comportării locale a funcției

3.5.1 Relația „O”. Proprietățile relației „O”

Vom considera că toate funcțiile studiate mai jos sunt definite într-o vecinătate găurită $\dot{U}(x_0)$ a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definiția 3.11. Dacă pentru funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ există o vecinătate $\dot{V}(x_0)$ și o constantă pozitivă $C > 0$ încât pentru toți $x \in \dot{V}(x_0)$ are loc inegalitatea

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|,$$

atunci se spune că *funcția f este supusă funcției g* sau *f este mărginită în raport cu g în $\dot{V}(x_0)$* .

Se notează

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0 \text{ sau } f = O(g), x \rightarrow x_0.$$

Se citește: funcția $f(x)$ este O mare de $g(x)$ când x tinde la x_0 .

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Relația $f(x) = O(1), x \rightarrow x_0$ este echivalentă cu faptul că $f(x)$ este mărginită într-o anumită vecinătate $\dot{V}(x_0)$.

Afirmație. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și pentru toți $x \in \dot{U}(x_0)$ avem $g(x) \neq 0$. Atunci $f = O(g), x \rightarrow x_0$ atunci și numai atunci când $\frac{f}{g}$ este funcție mărginită într-o anumită vecinătate $\dot{V}(x_0)$.

Exemplu. Fie $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$. Deoarece atunci când $x \rightarrow 0$ putem considera că $|x| < 1$ avem

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right| = |g(x)|,$$

adică

$$\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow 0.$$

Proprietățile relației „O”.

1) Dacă există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

atunci

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0.$$

2) Dacă $f = O(g), x \rightarrow x_0$ și $g = O(h), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f = O(h), x \rightarrow x_0,$$

adică

$$O(O(h)) = O(h), x \rightarrow x_0.$$

3) Dacă $f = O(g), x \rightarrow x_0$ și $h = O(g), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f + h = O(g), x \rightarrow x_0.$$

Astfel

$$O_1(g) + O_2(g) = O(g), x \rightarrow x_0.$$

4) Dacă $f_1 = O(g_1), x \rightarrow x_0$ și $f_2 = O(g_2), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2), x \rightarrow x_0.$$

Astfel

$$O(g_1) \cdot O(g_2) = O(g_1 \cdot g_2), x \rightarrow x_0.$$

3.5.2 Relația „o”. Proprietățile relației „o”

Definiția 3.12. Funcția $f(x)$ se numește *infinit mică în raport cu funcția $g(x)$* în punctul x_0 dacă într-o anumită vecinătate $\dot{V}(x_0)$ avem

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \text{ unde } \alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow x_0.$$

Se notează

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0 \text{ sau } f = o(g), x \rightarrow x_0.$$

Se citește: funcția $f(x)$ este *o mic* de $g(x)$ când x tinde la x_0 .

Notăția $f(x) = o(1), x \rightarrow x_0$ înseamnă că $f(x)$ este o funcție infinit mică în punctul x_0 .

Afirmație. Fie că pentru toți x din $\dot{V}(x_0)$ avem $g(x) \neq 0$. Atunci

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemplul 1. Fie $f(x) = x^3, g(x) = \sin x^2, x_0 = 0$. Avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2}{\sin x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0.$$

Deci

$$x^3 = o(\sin x^2), x \rightarrow 0.$$

Exemplul 2. Fie

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = \infty.$$

Observăm, că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

Deci $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow \infty$, sau $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, adică $\frac{1}{x^2}$ tinde mai repede la zero, atunci când $x \rightarrow \infty$.

În general, dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sunt infinit mici în punctul x_0 și $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$ atunci spunem că $f(x)$ este un infinit mic de ordin superior în raport cu $g(x)$ când $x \rightarrow x_0$.

Proprietățile relației „o”

1. Dacă $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$, atunci $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.
2. Dacă $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$, și $g(x) = O(h), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f(x) = o(h(x)), x \rightarrow x_0.$$

Astfel

$$o(O(h)) = o(h), x \rightarrow x_0.$$

Analogic

$$O(o(h)) = o(h), x \rightarrow x_0.$$

3. Dacă $f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$ și $f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0.$$

4. Dacă $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow x_0$ și $f_2(x) = O(g_2(x)), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2), x \rightarrow x_0.$$

Astfel

$$o(g_1) \cdot O(g_2) = o(g_1 \cdot g_2), x \rightarrow x_0.$$

Simbolurile O și o au fost introduse de către Edmund Landau (14.02.1877-19.02.1938).

3.5.3 Funcții echivalente

Definiția 3.13. Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ se numesc *echivalente* când $x \rightarrow x_0$ dacă într-o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ este definită o funcție $\varphi(x)$ așa încât

$$f(x) = \varphi(x) \cdot g(x) \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 1.$$

Se notează

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0.$$

Remarcă. Relația de echivalență a două funcții este simetrică, adică dacă $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$, atunci $g(x) \sim f(x), x \rightarrow x_0$.

Exemplu. Fie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}, \quad g(x) = x^2, \quad x_0 = 0.$$

Avem

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} \cdot x^2 = \frac{1}{1+x^4} \cdot g(x),$$

adică

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 1,$$

deci

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow 0.$$

Afirmații.

1. Pentru ca funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ să fie echivalente în punctul x_0 este necesar și suficient ca

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow x_0.$$

2. Fie că $\forall x \in \dot{V}(x_0)$ avem $g(x) \neq 0$. Atunci

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

3. Pentru orice funcție $f : \dot{V}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ avem $f(x) \sim f(x), x \rightarrow x_0$.

4. Dacă $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$ și $g(x) \sim h(x), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f(x) \sim h(x), x \rightarrow x_0.$$

5. Dacă $f_1(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0$ și $f_2(x) \sim g_2(x), x \rightarrow x_0$, atunci

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2, x \rightarrow x_0.$$

6. Fie că $\forall x \in \dot{V}(x_0)$ avem $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ și $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$. Atunci pentru orice funcție $h : V(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ din existența unei din limitele

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot h(x)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) \cdot h(x))$$

rezultă existența celeilalte limite și egalitatea lor.

Analogic, din existența unei din limitele

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)}$$

rezultă existența celeilalte și egalitatea lor.

3.5.4 Aplicarea relației de echivalență a funcțiilor la calculul limitelor de funcții

Teorema 3.17. Dacă $f(x) \sim f_1(x), x \rightarrow x_0, g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0$ și există limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

atunci există și limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și are loc egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Exemplul 1. Întrucât

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + x^n = 1 + nx + (C_n^2 x + \dots + x^{n-1}) \cdot x = 1 + nx + \alpha(x) \cdot x = 1 + nx + o(x),$$

avem că

$$(1+x)^n - 1 \sim nx, \text{ când } x \rightarrow 0.$$

Dar atunci

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^m - 1}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{mt}{nt} = \frac{m}{n}.$$

Exemplul 2. Din egalitățile

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

deducem că

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x) - (3x + o(x))}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

Exemplul 3. Întrucât când $x \rightarrow 0$ avem $1 - \cos x = o(x), 1 - \cos px = o(x), \sin x = x + o(x), \sin px = px + o(x)$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{px + o(x)} = \frac{1}{p}.$$

Exercițiu. Calculați limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + 3 \operatorname{arctg} 7x + 5x^2}{\ln(1 + 5x + \sin^2 x) + xe^x}$.

3.6 Funcții continue într-un punct

3.6.1 Noțiune de funcție continuă într-un punct. Operații aritmetice cu funcții continue. Continuitatea funcției compuse

Definiția 3.14. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă în punctul* $x_0 \in I$ dacă ea are limită în acest punct egală cu valoarea funcției în punctul dat

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

adică

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă pe* I dacă ea este continuă în orice punct $x_0 \in I$.

În baza definițiilor limitei funcției în punct în sensul lui Heine și în sensul lui Cauchy obținem următoarele definiții echivalente cu cea dată mai sus.

Definiția 3.15 (Heine). Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă în punctul* $x_0 \in I$ dacă pentru orice șir de valori a argumentului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in I$ convergent la x_0 , șirul valorilor respective ale funcției $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge la $f(x_0)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definiția 3.16 (Cauchy). Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă în punctul* $x_0 \in I$ dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ se va găsi un număr pozitiv $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in I$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ are loc inegalitatea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definiția 3.17. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă în punctul* x_0 dacă

$$\forall U(f(x_0), \varepsilon), \exists U(x_0, \delta) \quad \text{a.î.} \quad f(I \cap U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon).$$

Definiția 3.18. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă la stânga în punctul* x_0 dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

adică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad \forall x_0 - \delta < x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definiția 3.19. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă la dreapta în punctul* x_0 dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

adică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad \forall x_0 \leq x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Îi dăm argumentului x_0 o creștere Δx așa încât punctul $x = x_0 + \Delta x$ de asemenea să aparțină lui I . Funcția $f(x)$ în rezultat va primi creșterea $f(x) - f(x_0)$ notată cu $\Delta f(x_0)$,

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Din definiția funcției continue imediat obținem

Propoziția 3.1. *Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in I$ dacă și numai dacă oricărei creșteri infinit mici a argumentului îi corespunde o creștere infinit mică a funcției,*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Ușor ne putem convinge că operațiile aritmetice cu funcții continue ne aduc din nou la funcții continue.

Dacă funcțiile f și g sunt continue pe I , atunci:

- i) suma $f + g$ este continuă pe I ;
- ii) produsul $f \cdot g$ este funcție continuă pe I ;
- iii) câtul $\frac{f}{g}$ este funcție continuă pe mulțimea $D = \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ pe care este definit câtul.

Teorema 3.18 (Teorema despre continuitatea funcției compuse). *Dacă $u = f(x)$ este funcție continuă în punctul x_0 , $f(x_0) = u_0$, iar funcția $y = g(u)$ este continuă în u_0 , atunci funcția compusă $y = g(f(x))$ este continuă în punctul x_0 .*

Cu alte cuvinte, orice compunere $g \circ f$ de funcții continue este și ea continuă.

3.6.2 Continuitatea unor funcții elementare

Să considerăm funcția constantă $f(x) = C$. Pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice creștere a argumentului Δx avem

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

deci funcția dată este continuă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$.

Funcția $f(x) = x$ este continuă în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

Orice polinom algebric

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

este o funcție continuă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$, aceasta rezultă din faptul că funcția x^n , $n \in \mathbb{N}$ este continuă pe \mathbb{R} și din teoremele despre operațiile algebrice cu funcții continue.

Orice funcție rațională

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

este continuă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$ pentru care $Q(x) \neq 0$.

3.6.3 Puncte de discontinuitate. Clasificarea lor

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă în punctul $x_0 \in I$. Atunci

- 1) $\exists f(x_0)$;
- 2) $\exists f(x_0 - 0)$;
- 3) $\exists f(x_0 + 0)$;
- 4) $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Dacă în punctul x_0 cel puțin una din aceste patru condiții nu se îndeplinește, punctul x_0 se numește *punct de discontinuitate pentru funcția f* .

Definiția 3.20. Dacă x_0 este un punct de discontinuitate pentru f în care ambele limite laterale

$$f(x_0 - 0) \quad \text{și} \quad f(x_0 + 0)$$

există și sunt finite, atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate de speța I pentru funcția f* .

Mărimea

$$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$$

se numește *saltul funcției f în punctul x_0* .

Dacă x_0 este un punct de discontinuitate de speța I a lui f în care saltul este egal cu 0, atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate aparentă*.

Exemplu. Să studiem la continuitate funcția $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Domeniul de definiție al funcției date este $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funcția f este discontinuă în punctul $x_0 = 0$, dar

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Așadar, $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate aparentă. Pentru a înlătura discontinuitatea funcției în acest punct, o putem prelungi prin continuitate punând $f(0) = 1$.

Definiția 3.21. Dacă x_0 este un punct de discontinuitate pentru funcția $f(x)$ și cel puțin una dintre limitele laterale ale lui $f(x)$ în acest punct nu există sau este infinită, atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate de speța a II-a pentru funcția f* .

Exemplu. Să studiem la continuitate funcția

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x^2, & \text{dacă } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x - 2}, & \text{dacă } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{dacă } x > 3. \end{cases}$$

Funcția $f(x)$ este definită pe \mathbb{R} , dar ar putea fi discontinuă în punctele $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Fie $x_1 = 1$. Avem

$$f(1) = 1, \quad f(1 - 0) = 1 + 1 = 2, \quad f(1 + 0) = 1^2 = 1.$$

Funcția f are în acest punct discontinuitate de speța I, saltul funcției este egal cu

$$|f(1 + 0) - f(1 - 0)| = 1,$$

funcția este continuă la stânga în acest punct.

Fie $x_2 = 2$. Avem

$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f(2 - 0) = 2^2 = 4, \quad f(2 + 0) = \frac{1}{+0} = \infty.$$

Deci, $x_2 = 2$ este un punct de discontinuitate de speța a doua pentru f .

Fie $x_3 = 3$. Avem

$$f(3) = \frac{1}{3-2} = 1, \quad f(3 - 0) = \frac{1}{3-2} = 1, \quad f(3 + 0) = 1.$$

Deci f este continuă în punctul $x_3 = 3$.

3.7 Proprietățile funcțiilor continue pe un segment

3.7.1 Mărginirea funcției continue pe un segment

Definiția 3.22. O funcție $f(x)$ se numește *continuă pe un segment* $[a, b]$ dacă ea este continuă în fiecare punct al intervalului (a, b) , este continuă la dreapta în punctul a și este continuă la stânga în punctul b .

Clasa funcțiilor continue pe segmentul $[a, b]$ se notează cu $C_{[a,b]}$.

Teorema 3.19 (Weierstrass). *Orice funcție continuă pe un segment este mărginită.*

$$f \in C_{[a,b]} \implies \exists M > 0 \text{ a.î. } |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Demonstrație. Admitem contrariul. Fie că

$$\forall M > 0, \exists x_M \in [a, b] \text{ a.î. } |f(x_M)| > M.$$

Dar atunci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ putem găsi un punct $x_n \in [a, b]$ astfel încât

$$|f(x_n)| > n. \tag{3.11}$$

Șirul de puncte $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in [a, b]$ este mărginit și deci, conform Teoremei Bolzano - Weierstrass, din el putem extrage un subșir convergent $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ și fie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \alpha.$$

Deoarece

$$a \leq x_{n_k} \leq b, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

trecând la limită cu $k \rightarrow \infty$ vom avea

$$a \leq \alpha \leq b$$

și deci $\alpha \in [a, b]$.

Fiind continuă pe segmentul $[a, b]$, funcția $f(x)$, este continuă în punctul $\alpha \in [a, b]$ și deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = f(\alpha),$$

dar aceasta contrazice condiția (3.11). Deci presupunerea făcută este falsă și prin urmare $f(x)$ este mărginită pe $[a, b]$. □

Remarcă. Teorema nu este adevărată, dacă funcția este continuă pe un interval deschis sau semiinterval. De exemplu, funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă pe semiintervalul deschis la stânga $(0, 1]$, dar nu este mărginită pe el.

3.7.2 Atingerea marginii superioare exacte și marginii inferioare exacte

Teorema 3.20 (Weierstrass). *Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un segment $[a, b]$, atunci ea atinge pe acest segment valoarea sa minimă și valoarea sa maximă, adică se vor găsi așa puncte $\alpha, \beta \in [a, b]$ încât*

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(\alpha), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta).$$

Demonstrație. Conform Teoremei 3.20 funcția $f(x)$ este mărginită pe segmentul $[a, b]$ și deci există marginea superioară finită a funcției f pe $[a, b]$ și fie

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Dar atunci,

i) $\forall x \in [a, b]$ avem $f(x) \leq M$;

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in [a, b]$ a. î. $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$. Atunci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ vom găsi un așa punct $x_n \in [a, b]$ încât

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit și deci din el putem extrage un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent și fie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \beta \quad \text{și} \quad \beta \in [a, b].$$

Folosind continuitatea funcției $f(x)$ în punctul β să trecem la limită în inegalitatea

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M.$$

Obținem

$$M - 0 \leq f(\beta) \leq M$$

Deci

$$f(\beta) = M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Analogic se demonstrează cealaltă afirmație a teoremei.

□

Remarcă. Teorema nu este adevărată, dacă funcția este continuă pe un interval deschis sau semiinterval. De exemplu, funcția $f(x) = x$ este continuă pe intervalul $(0, 1)$ și este mărginită pe el, dar

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} x = 1 \notin E_f.$$

Exerciții.

i) Aduceți un exemplu de funcție continuă definită pe intervalul $(0, 1)$, dar care nu atinge maximumul său pe $(0, 1)$.

ii) Aduceți un exemplu de funcție continuă definită pe $(0, 1)$ care este mărginită, dar care nu atinge nici maximumul său și nici minimumul său pe acest interval.

iii) Aduceți un exemplu de funcție discontinuă definită pe segmentul $[0, 1]$ care este mărginită, dar nu atinge nici maximumul său și nici minimumul său pe acest segment.

3.7.3 Anularea funcției

Teorema 3.21 (Cauchy). *Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$ și primește la extremitățile acestui segment valori de semne opuse, atunci pe intervalul (a, b) există un punct c în care funcția se anulează, adică*

$$(f(a) < 0 \text{ și } f(b) > 0) \text{ sau } (f(a) > 0 \text{ și } f(b) < 0) \implies \exists c \in (a, b) \text{ a.î. } f(c) = 0.$$

Demonstrație. Fie $f(a) < 0$, iar $f(b) > 0$. Împărțim segmentul $[a, b]$ în jumătate. Dacă în mijlocul segmentului $[a, b]$ funcția primește valoarea 0, atunci teorema este demonstrată. În caz contrar, una dintre jumătăți este de așa natură încât la extremitățile ei funcția primește valori de semne opuse și dacă notăm cu $[a_1, b_1]$ acest segment, atunci avem

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0.$$

Împărțim segmentul $[a_1, b_1]$ în jumătate și ori găsim punctul c , ori obținem un segment $[a_2, b_2]$ la extremitățile căruia funcția ia valori de semne opuse și anume

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

Continuând acest proces, ori peste un număr finit de pași vom avea că punctul de diviziune este punctul căutat, ori vom obține un șir infinit de segmente incluse $[a_n, b_n]$ așa încât pentru toți $n \in \mathbb{N}$ avem

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0. \tag{3.12}$$

Lungimile segmentelor $[a_n, b_n]$ sunt egale cu

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

În baza principiului segmentelor incluse avem că există un singur punct c comun tuturor segmentelor

$$a_n \leq c \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să trecem în (3.12) la limită cu $n \rightarrow \infty$ și să folosim continuitatea funcției $f(x)$ pe segmentul $[a, b]$. Obținem

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0,$$

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0,$$

deci $f(c) = 0$.

□

Exemplu. Funcția $f(x) = \cos x - x$ este continuă pe segmentul $[0, \pi]$ și la extremitățile lui ia valorile

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(\pi) = -1 - \pi < 0.$$

Deci pe intervalul $(0, \pi)$ există un așa punct c încât $f(c) = 0$. Ca urmare, concludem că ecuația

$$\cos x - x = 0$$

are o rădăcină pe intervalul $(0, \pi)$.

Exerciții.

i) Aduceți un exemplu de funcție continuă definită pe $[0, 1) \cup (1, 2]$ care este pozitivă în punctul 2, negativă în punctul 0, dar care nu se anulează nici pentru o valoare x .

ii) Credeți în existența numărului $\sqrt[7]{8}$? Adică, există oare un număr care multiplicat prin sine însăși de 7 ori ar da 8? Înainte de a face o concluzie, gândiți-vă că calculatorul vostru vă înșală, căci el în general nu știe despre $\sqrt[7]{8}$, tot ce poate face el, este să aproximeze acest număr și ceea ce vă dă el este doar o aproximație. De ce totuși există acest număr?

3.7.4 Atingerea valorilor intermediare

Teorema 3.22 (Proprietatea lui Darboux). *Dacă o funcție $f(x)$ este continuă pe un segment $[a, b]$ și la extremitățile lui primește valori diferite*

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad A \neq B,$$

atunci oricare ar fi numărul C cuprins între A și B se va găsi un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = C$.

Demonstrație. Această afirmație este o consecință directă din Teorema 3.21. Fie $A < C < B$. Considerăm o funcție ajutătoare

$$F(x) = f(x) - C, \quad x \in [a, b].$$

Ca diferența funcțiilor continue pe $[a, b]$, funcția F este continuă pe $[a, b]$ și

$$F(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$F(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Deci, conform Teoremei 3.21 există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $F(c) = 0$. Dar $F(c) = f(c) - C$, deci $f(c) - C = 0$ și definitiv avem $f(c) = C$.

□

3.7.5 Continuitatea uniformă a unei funcții continue pe un segment

Fie dată o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fixăm un punct $x_0 \in I$. Amintim că funcția $f(x)$ se numește continuă în punctul x_0 , dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ a.î. } \forall x : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

O funcție f se numește continuă pe mulțimea I , dacă ea este continuă în fiecare punct al acestei mulțimi. În acest caz, punctul x_0 parcurge toată mulțimea I și pentru numărul $\varepsilon > 0$, numărul δ poate depinde și de x_0 nu numai de ε .

Definiția 3.23. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuă pe mulțimea I* , dacă $\forall \varepsilon > 0$ și $\forall x_0 \in I$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, a. î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in I : |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$.

Natural apare întrebarea, s-ar putea oare pentru orice număr pozitiv ε de ales un așa δ care s-ar potrivi pentru toate punctele mulțimii I ?

Definiția 3.24. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *uniform continuă* pe mulțimea I , dacă pentru orice număr pozitiv ε , există un așa număr $\delta(\varepsilon) > 0$, încât pentru orice puncte $x' \in I$ și $x'' \in I$ pentru care $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ are loc inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Exemplul 1. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ este uniform continuă pe \mathbb{R} . Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \varepsilon,$$

adică $\delta = \varepsilon$ și nu depinde de punctele $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2. Funcția $f : (0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$ deși este continuă, nu este uniform continuă pe intervalul dat. Într-adevăr, fie

$$x' = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad \sin \frac{1}{x'} = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \pm 1,$$

$$x'' = \frac{1}{n\pi}, \quad \sin \frac{1}{x''} = \sin(n\pi) = 0.$$

Deci, diferența $|f(x') - f(x'')| = 1$ și nu poate fi făcută oricât de mică, deși

$$|x' - x''| = \left| \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{1}{n\pi} \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Teorema 3.23 (Teorema lui Cantor). *Orice funcție continuă pe un segment închis este uniform continuă pe el.*

3.8 Continuitatea unor clase de funcții

3.8.1 Continuitatea funcțiilor monotone

Definiția 3.25. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *strict crescătoare* (coresp. *strict descrescătoare*) pe mulțimea I dacă pentru orice valori $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$ are loc inegalitatea

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{coresp. } f(x_1) > f(x_2)).$$

Definiția 3.26. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *crescătoare* (coresp. *descrescătoare*) pe mulțimea I dacă pentru orice valori $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$ are loc inegalitatea

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{coresp. } f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Teorema 3.24. Fie f o funcție strict crescătoare (descrescătoare) pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Dacă mulțimea $E_f = f(I)$ a valorilor funcției f pe intervalul I se conține într-un interval Y și îl acoperă în întregime, atunci funcția f este continuă pe I .

Demonstrație. Fie $x_0 \in I$ un punct arbitrar al intervalului I , dar diferit de extremitatea din dreapta a lui. Să demonstrăm continuitatea la dreapta a funcției f în punctul x_0 .

Să ne convingem mai întâi că punctul $y_0 = f(x_0) \in Y$ nu este extremitatea din dreapta a intervalului Y . Într-adevăr, în intervalul I se va găsi un așa punct x încât $x > x_0$. Dar atunci $y = f(x) > f(x_0) = y_0$.

Să fixăm în mod arbitrar numărul pozitiv ε , dar așa încât punctul $y_1 = y_0 + \varepsilon$ de asemenea să aparțină intervalului Y . Conform ipotezei, în I se va găsi un punct x_1 așa încât $f(x_1) = y_1$. Deoarece $y_1 > y_0$, avem $x_1 > x_0$.

Fie $\delta = x_1 - x_0$. Dacă considerăm un punct x cu $x_0 < x < x_1$, adică

$$0 < x - x_0 < x_1 - x_0 = \delta,$$

atunci observăm că

$$f(x_0) = y_0 < f(x) < f(x_1) = y_1 = y_0 + \varepsilon,$$

adică

$$0 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

deci funcția f este continuă la dreapta în punctul x_0 . Analogic se demonstrează că funcția f este continuă la stânga în punctul x_0 , dacă x_0 nu este extremitatea din stânga a intervalului I . În așa fel deducem că funcția f este continuă pe I .

□

Exemple.

1. Funcția exponențială $f(x) = a^x$, $a > 0$ este o funcție monoton crescătoare pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, dacă $a > 1$ și corespunzător monoton descrescătoare, dacă $0 < a < 1$. Valorile ei sunt pozitive și umplu tot intervalul $(0, +\infty)$. Ca urmare, funcția exponențială este continuă pe \mathbb{R} .

2. Funcția logaritmică $f(x) = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$) este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$ dacă $a > 1$ și este descrescătoare dacă $0 < a < 1$ și primește toate valorile intervalului $(-\infty, +\infty)$. Prin urmare, funcția dată este continuă pe intervalul $(0, +\infty)$.

3. Funcțiile trigonometrice $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ sunt funcții continue pe domeniile sale de definiție. De exemplu, continuitatea funcției $f(x) = \sin x$ pe segmentele $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ rezultă din monotonia ei. De aici rezultă continuitatea funcției $f(x) = \sin x$ pe toată axa reală.

3.8.2 Existența și continuitatea funcției inverse

Teorema 3.25. *Fie $f(x)$ o funcție continuă și strict crescătoare pe segmentul $[a, b]$ și $A = f(a)$, $B = f(b)$. Atunci imaginea segmentului $[a, b]$ este segmentul $[A, B]$ și funcția $x = f^{-1}(y)$ inversă relativ la funcția $y = f(x)$ este uniformă, strict crescătoare și continuă pe segmentul $[A, B]$.*

Demonstrație. Remarcăm, mai întâi, că în ipoteza teoremei s-ar putea de înlocuit termenul „crescătoare” cu termenul „descrescătoare” și atunci în concluzie ar trebui de înlocuit segmentul $[A, B]$ cu segmentul $[B, A]$.

Observăm că dacă o funcție f este definită și continuă pe un anumit interval închis I , atunci valorile pe care le ia funcția, când x parcurge intervalul I vor umple un anumit interval I_1 . Într-adevăr, fie $m = \inf_{x \in I} f(x)$ și $M = \sup_{x \in I} f(x)$, conform teoremei lui Weierstrass aceste valori sunt atinse în anumite puncte ale segmentului I , fie $f(x_m) = m$ și $f(x_M) = M$. Pentru orice valoare $m < l < M$, conform teoremei despre atingerea valorilor intermediare există un punct $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = l$. Deci, pentru orice $l \in I_1 = [m, M]$ există un punct $x_0 \in I$ așa încât $f(x_0) = l$.

Prin urmare, pentru fiecare valoare $y_0 \in [A, B]$ se va găsi cel puțin o valoare $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $y_0 = f(x_0)$. Din monotonia strictă a funcției f reiese că această valoare x_0 este unică, căci, dacă vom admite că valoarea y_0 se atinge încă într-un punct $x_1 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_0$, atunci dacă, de exemplu $x_0 < x_1$, ar trebui să avem $y_0 = f(x_0) < f(x_1) = y_0$, ceea ce este imposibil. Deci, pe segmentul $[A, B]$ este definită funcția $x = f^{-1}(y)$ inversă funcției $y = f(x)$.

Această funcție, de asemenea este strict crescătoare. Într-adevăr, fie $y_1, y_2 \in [A, B]$ și $y_1 < y_2$. Notăm $x_1 = f^{-1}(y_1)$ și $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Dacă vom admite că $x_1 > x_2$, atunci vom avea $f(x_1) > f(x_2)$ adică $y_1 > y_2$, ceea ce contrazice faptul că $y_1 < y_2$. Deci funcția inversă $x = f^{-1}(y)$ este monotonă și valorile ei umplu segmentul $[a, b]$ și conform teoremei despre continuitatea funcției monotone ea este continuă pe $[A, B]$. \square

Exemplu. Funcția $y = \sin x$ este continuă și strict monotonă pe segmentul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Imaginea acestui segment prin funcția $\sin x$ este segmentul $[-1, 1]$. Conform teoremei demonstrate mai sus, pe segmentul $[-1, 1]$ există funcția inversă $x = \arcsin y$ care este strict crescătoare și continuă pe acest segment.

Analogic ne convingem că funcția $f(x) = \arccos x$ este continuă pe segmentul $[-1, 1]$, iar funcțiile $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ sunt continue pe intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Teorema 3.26. *Fie $f(x)$ o funcție continuă și strict crescătoare pe intervalul (a, b) și fie*

$$A = \inf_{x \in (a, b)} f(x), \quad B = \sup_{x \in (a, b)} f(x),$$

unde în particular ar putea fi $a, A = -\infty, b, B = +\infty$. Atunci imaginea intervalului (a, b) este intervalul (A, B) și funcția $x = f^{-1}(y)$ inversă funcției $y = f(x)$ este bijectivă, strict crescătoare și continuă pe intervalul (A, B) .

Remarcăm că în ipoteza teoremei s-ar putea de înlocuit termenul „crescătoare” cu termenul „descrescătoare” și atunci în concluzie ar trebui de înlocuit intervalul (A, B) cu intervalul (B, A) .

Capitolul 4

Calculul diferențial al funcțiilor de o variabilă reală

4.1 Derivata funcției într-un punct

4.1.1 Unele probleme care au condus la noțiunea de derivată

Una din noțiunile fundamentale ale analizei matematice și în fond ale întregii științe este cea de derivată, atribuită deopotrivă lui Leibniz și Newton. Această noțiune modelează ceea ce s-ar putea numi „viteza de variație” a unei funcții, permite adâncirea studiului local și global al funcțiilor și în același timp stă la baza formulării matematice a numeroaselor legi ale fizicii. De altfel, Newton a introdus și a utilizat în mod sistematic conceptul de derivată anume în legătură cu studiul legilor mecanice. Au existat două probleme care au condus la descoperirea noțiunii de derivată: una fizică – modelarea matematică a noțiunii intuitive de viteză a unui punct material, și alta geometrică – problema despre trasarea tangentei la o curbă plană.

Problema despre determinarea vitezei instantanee (momentane) a unui mobil.

Fie că un punct material se mișcă rectiliniu de-a lungul unei axe l , în direcția pozitivă a acestei axe și fie că funcția $s = s(t)$ exprimă distanța parcursă de punctul material în momentul t de timp.

Fixăm un moment t_0 de timp, în acest moment punctul material se află la distanța $s(t_0)$ de la origine. Și fie $t = t_0 + \Delta t$ un moment arbitrar de timp. În acest moment punctul se află la distanța $s(t) = s(t_0 + \Delta t)$ de la origine. În intervalul de timp $(t_0, t_0 + \Delta t)$ punctul material a parcurs o distanță

$$\Delta s(t_0) = s(t) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Dacă mișcarea punctului material ar fi fost uniformă, atunci viteza lui ar fi fost egală cu

$$\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Dacă mișcarea nu este uniformă, atunci raportul $\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t}$ nu este constant și exprimă viteza medie a punctului material în intervalul de timp $(t_0, t_0 + \Delta t)$.

Practic nu există mișcări uniforme, dar în intervale foarte mici de timp ea tinde să devină uniformă, iar viteza medie respectivă tinde către o caracteristică a mișcării în momentul exact de timp t_0 , care se numește *viteză instantanee* sau *momentană*

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

în ipoteza că această limită există.

Problema despre trasarea tangentei la o curbă plană.

Fie γ o curbă continuă pe plan și fie A și A' două puncte de pe curba γ . Dreapta S , care trece prin punctele A și A' se numește *secantă* a curbei γ . Vom mișca punctul A' continuu de-a lungul curbei γ , apropiindu-l de punctul A . În acest proces, secanta S se va roti în jurul punctului A și se poate întâmpla ca ea să tindă să ocupe o anumită poziție pe deplin determinată a unei drepte care trece prin punctul A și pe care o vom nota cu T . Dacă aceasta are loc, atunci spunem că curba γ în punctul A are tangentă, iar dreapta T o numim *tangentă* la γ în punctul A .

Nu orice curbă continuă are tangentă în fiecare punct al său.

Fie că, curba γ reprezintă graficul funcției $y = f(x)$, $x \in (a, b)$. Fixăm pe γ un punct A cu abscisa x_0 . Îi dăm lui x_0 o creștere suficient de mică Δx , așa ca $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Notăm cu A' punctul de pe γ cu abscisa $x_0 + \Delta x$ și ordonata $f(x_0 + \Delta x)$. Secanta care trece prin punctele A și A' formează cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi β , tangenta căruia este egală cu

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dacă Δx tinde la zero, atunci din continuitatea lui f rezultă că și Δy va tinde la zero, iar punctul A' se va apropia nelimitat de A . Se poate întâmpla (dar aceasta poate și să nu se întâmple!) că atunci când $\Delta x \rightarrow 0$, raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ va tinde la o anumită valoare limită k

$$\exists k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

În aceste condiții, unghiul β va tinde la un unghi α diferit de $\frac{\pi}{2}$. Împreună cu unghiul β și secanta S va tinde să ocupe poziția bine determinată a tangentei T la curba γ în punctul A , care formează cu direcția pozitivă a axei Ox unghiul α .

Așadar, dacă există limita finită

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

atunci curba γ are tangentă în punctul cu abscisa x_0 , panta căreia este egală cu valoarea acestei limite.

Observăm că ambele aceste probleme conduc la necesitatea efectuării următoarei operații: trebuie să calculăm limita de la raportul dintre creșterea funcției într-un punct către creșterea argumentului, în condiția că creșterea argumentului tinde la 0. Această operație în matematică se numește *diferențiere*, iar rezultatul ei se numește *derivată*.

4.1.2 Definiția derivatei funcției într-un punct. Derivate laterale

Fie dată o funcție $f(x)$ definită într-o anumită vecinătate a punctului x_0 și fie x un punct arbitrar din această vecinătate.

Fie $\Delta x = x - x_0$ creșterea argumentului. Ei îi corespunde creșterea funcției

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Definiția 4.1. Fie $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există limita (finită) a raportului dintre creșterea funcției și creșterea argumentului, când creșterea argumentului tinde la 0, adică există

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

atunci această limită se numește *derivata funcției $f(x)$ în punctul x_0* și se notează cu unul dintre simbolurile

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \dot{f}(x_0).$$

Așadar

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definiția 4.2. Fie $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că funcția $f(x)$ are în punctul x_0 *derivată infinită* egală cu $+\infty$ (coresp. $-\infty$) dacă

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \quad (\text{coresp. } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty).$$

Definiția 4.3. Fie $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. *Derivatele laterale* ale funcției $f(x)$ în punctul x_0 se definesc astfel

$$f'(x_0 + 0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{coresp. } f'(x_0 - 0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Teorema 4.1. Fie $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru ca în punctul x_0 să existe derivata $f'(x_0)$ a funcției $f(x)$ este necesar și suficient ca în acest punct să existe derivata la stânga și derivata la dreapta a funcției $f(x)$ și ca ele să fie egale

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0).$$

Exemplu. Fie $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $x_0 > 0$, atunci ținând cont de faptul că $\Delta x \rightarrow 0$, putem considera că $x_0 + \Delta x > 0$.
Astfel

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 = 2|x_0|.$$

Dacă $x_0 < 0$, atunci ținând cont de faptul că $\Delta x \rightarrow 0$, putem considera că $x_0 + \Delta x < 0$.
Astfel

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 + x_0^2 = -2x_0\Delta x - (\Delta x)^2.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x_0\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2x_0 = 2|x_0|.$$

Dacă $x_0 = 0$, atunci

$$f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x|\Delta x| - 0 = \Delta x|\Delta x|.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0.$$

În așa fel

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{avem} \quad (x|x|)' = 2|x|.$$

Exercițiu. Arătați că $\forall x \in \mathbb{R} : (x^3)' = 3x^2$.

Remarcă. Definiția derivatei într-un punct are un caracter local. Mai exact aceasta înseamnă următoarele: comportarea la limită a raportului

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{când} \quad x \rightarrow x_0$$

nu se va schimba, dacă pentru un $\delta > 0$ dat vom schimba valoarea funcției în exteriorul δ -vecinătății punctului x_0 .

4.1.3 Continuitatea funcției derivabile

Teorema 4.2. Dacă o funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ are derivată în punctul x_0 , atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstrație. Conform ipotezei

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Deci

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \text{unde} \quad \alpha(\Delta x) \rightarrow 0, \quad \text{când} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

De aici obținem

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0,$$

ceea ce înseamnă că funcția f este continuă în punctul x_0 .

□

Remarcă. Afirmatia inversă nu este adevărată: **Nu orice funcție continuă într-un punct are derivată în acest punct.**

Exemplu. Fie $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Această funcție este continuă pe \mathbb{R} și în particular în punctul $x_0 = 0$. Dar

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

și

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Astfel

$$f'(0-0) \neq f'(0+0)$$

și deci nu există derivata funcției date în punctul 0 deși funcția este continuă în acest punct.

4.1.4 Exemple de calcul al derivatelor

1. Fie $f(x) = C$, $C = \text{const.}$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

deci

$$C' = 0.$$

2. Fie $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x - x) \left((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1} \right) = \\ &= \Delta x \cdot \left((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \left((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left((x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + x^{n-1} \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Fie $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x.$$

Exercițiu. Arătați că $\forall x \in \mathbb{R} : (\cos x)' = -\sin x$.

4. Fie $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

În particular

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x.$$

5. Fie $f(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

Astfel

$$\forall x \in (0, +\infty) : (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

În particular

$$\forall x \in (0, +\infty) : (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4.1.5 Regulile de diferențiere de bază

Teorema 4.3. Fie funcțiile $u : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ și $v : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ au derivatele $u'(x_0)$ și $v'(x_0)$ în punctul x_0 . Atunci:

i) funcția $u + v$ are derivată în punctul x_0 și

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0);$$

ii) funcția $u \cdot v$ are derivată în punctul x_0 și

$$(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0);$$

iii) dacă $v(x_0) \neq 0$, atunci funcția $\frac{u}{v}$ are derivată în punctul x_0 și

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Demonstrație. Îi dăm lui x_0 o creștere Δx . Funcțiile u și v primesc respectiv creșterile

$$\Delta u(x_0) = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0), \quad \Delta v(x_0) = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0).$$

i) Fie $f(x) = (u + v)(x)$. Avem

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) = \Delta u(x_0) + \Delta v(x_0).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

ii) Fie $f(x) = (u \cdot v)(x)$. Avem

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= (u(x_0) + \Delta u(x_0))(v(x_0) + \Delta v(x_0)) - u(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= u(x_0)v(x_0) + u(x_0)\Delta v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) + \Delta u(x_0)\Delta v(x_0) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= u(x_0)\Delta v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) + \Delta u(x_0)\Delta v(x_0). \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0)\Delta v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) + \Delta u(x_0)\Delta v(x_0)}{\Delta x} = \\ &= v(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + u(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta v(x_0) \right) = \\ &= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0). \end{aligned}$$

Aici am observat că

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta v(x_0) \right) = u'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

deoarece funcția $v(x)$ având derivată în x_0 este continuă în acest punct și deci $\Delta v(x_0) \rightarrow 0$, când $\Delta x \rightarrow 0$.

iii) Fie $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Avem

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0) + \Delta u(x_0)}{v(x_0) + \Delta v(x_0)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \\ &= \frac{u(x_0)v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)\Delta v(x_0)}{v(x_0)(v(x_0) + \Delta v(x_0))} = \frac{v(x_0)\Delta u(x_0) - u(x_0)\Delta v(x_0)}{v(x_0)(v(x_0) + \Delta v(x_0))}. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0)\Delta u(x_0) - u(x_0)\Delta v(x_0)}{\Delta x v(x_0)(v(x_0) + \Delta v(x_0))} = \\ &= \frac{1}{v^2(x_0)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v(x_0) \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} - u(x_0) \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Exercițiu. Arătați că

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4.2 Funcții diferențiabile. Diferențiala funcției

4.2.1 Noțiune de funcție diferențiabilă într-un punct. Condiția necesară și suficientă de diferențiabilitate a unei funcții într-un punct

Fie $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definiția 4.4. O funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *diferențiabilă* în punctul x_0 , dacă există un număr real $A \in \mathbb{R}$ și o funcție $\alpha : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfăcând condiția $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ astfel încât

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad \forall x \in U(x_0).$$

Sau, cu $x - x_0 = \Delta x$,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(x_0 + \Delta x)\Delta x, \quad \forall x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

sau, cu $\Delta x = h$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \alpha(x_0 + h) \cdot h, \quad \forall x_0 + h \in U(x_0).$$

Observăm că

$$\alpha(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Cu alte cuvinte, o funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *diferențiabilă* în punctul x_0 , dacă pentru creșteri Δx suficient de mici ale argumentului, creșterea

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

a funcției poate fi scrisă ca sumă a doi termeni, unul liniar în raport cu creșterea argumentului Δx , iar al doilea un infinit mic de ordin superior în raport cu Δx

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Teorema 4.4. *Pentru ca o funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ să fie diferențiabilă în punctul x_0 este necesar și suficient ca f să aibă derivată în acest punct.*

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în punctul x_0 , atunci conform definiției avem

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

De aici obținem

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Trecem la limită în ultima egalitate cu $\Delta x \rightarrow 0$ și obținem

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

deci

$$\exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Suficiența. Fie că $\exists f'(x_0) = A$. Atunci conform definiției derivatei funcției avem

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A$$

și deci

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

De aici obținem

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Deci f este diferențiabilă în punctul x_0 . □

Din această teoremă rezultă că constanta A din definiția funcției diferențiabile este întocmai derivata funcției f în punctul x_0 . Deci creșterea unei funcții f diferențiabile într-un punct x_0 poate fi scrisă în forma

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

4.2.2 Noțiune de diferențială. Aplicațiile diferențialei la calcule aproximative

Dacă f este diferențiabilă în punctul x_0 , atunci în creșterea ei putem evidenția doi termeni: unul liniar în raport cu Δx , care se numește *partea liniară principală a creșterii funcției* și celălalt infinit mic în raport cu Δx .

Definiția 4.5. Dacă funcția $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în punctul x_0 , atunci partea liniară principală din creșterea funcției, adică funcția liniară

$$h \mapsto A \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

se numește *diferențiala funcției f* și se notează cu

$$df(x_0), \quad \text{sau} \quad df_{x_0}, \quad \text{sau} \quad df_{x_0}(h), \quad \text{sau} \quad df(x_0; h).$$

Deci,

$$df(x_0; h) = Ah = f'(x_0)h,$$

sau, cu $h = \Delta x$

$$df(x_0; \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Observăm că funcția $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ este diferențiabilă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$ și

$$df(x; \Delta x) = 1 \cdot \Delta x,$$

deci diferențiala funcției identice este aceeași în toate punctele și prin urmare putem folosi notația

$$dx = \Delta x.$$

Diferențiala funcției identice se numește *diferențiala variabilei independente*.

Așadar, diferențiala unei funcții f diferențiabile într-un punct x_0 este

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

de aici vine notația

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru funcția de o variabilă reală noțiunile de diferențiabilitate și derivabilitate sunt echivalente și deci, dacă funcțiile $u : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ și $v : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt diferențiabile în punctul x_0 , atunci și funcțiile $u \pm v$, $u \cdot v$ și $\frac{u}{v}$, (în cazul când $v(x_0) \neq 0$) sunt diferențiabile în punctul x_0 și au loc formulele

$$d(u \pm v)(x_0; dx) = du(x_0; dx) \pm dv(x_0; dx),$$

$$d(uv)(x_0; dx) = v(x_0)du(x_0; dx) + u(x_0)dv(x_0; dx),$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)(x_0; dx) = \frac{v(x_0)du(x_0; dx) - u(x_0)dv(x_0; dx)}{v^2(x_0)}.$$

Fie că funcția $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în punctul x_0 , atunci creșterea ei în acest punct poate fi aproximată prin diferențiala ei în acest punct

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0; dx),$$

adică

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

deci

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Ultima foarmulă se folosește la calcularea aproximativă a valorilor funcțiilor.

Exemplu. De calculat aproximativ valoarea expresiei $(9.14)^2 + \sqrt{9.14}$.

Fie $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Dacă considerăm $x = 9.14$, atunci observăm că $f(9.14) = (9.14)^2 + \sqrt{9.14}$. Pentru a calcula valoarea funcției în punctul $x = 9.14$ vom folosi formula de mai sus. Fie $x_0 = 9$, atunci $\Delta x = x - x_0 = 9.14 - 9 = 0.14$. Avem

$$f(x_0) = f(9) = 9^2 + \sqrt{9} = 84, \quad f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(9) = 2 \cdot 9 + \frac{1}{2\sqrt{9}} = 18\frac{1}{6} = \frac{109}{6}.$$

Deci

$$f(9.14) = 9.14^2 + \sqrt{9.14} \approx 84 + \frac{109}{6} \cdot 0.14 = 84 + \frac{109 \cdot 0.7}{3} \approx 84 + 25.433 = 109.433.$$

4.3 Sensul geometric și sensul fizic al derivatei și diferențialei funcției de o variabilă reală

4.3.1 Sensul geometric al derivatei funcției de o variabilă reală. Ecuația tangentei la graficul funcției

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Din problema despre trasarea tangentei la graficul unei funcții, cunoaștem că dacă există derivata finită $f'(x_0)$, atunci în punctul cu abscisa $x = x_0$ putem trasa tangenta la graficul funcției și panta tangentei este

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0),$$

aici α este unghiul pe care-l formează tangenta cu direcția pozitivă a axei Ox . În așa fel, ecuația tangentei dusă la graficul funcției $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

adică

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Dacă $f'(x_0) \neq 0$, adică tangenta nu este paralelă cu axa Ox , atunci normala dusă la graficul funcției $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este definită de ecuația

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

sau

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemplul 1. Scrieți ecuațiile tangentei și normalei duse la graficul funcției $y = x^3 - 3x$ în punctul cu abscisa $x_0 = -2$. Panta tangentei este

$$k = f'(-2) = (3x^2 - 3)|_{x=-2} = 9, \quad \text{iar} \quad f(-2) = -2.$$

Ecuația tangentei este

$$y = 9(x + 2) - 2, \quad \text{adică} \quad y = 9x - 16.$$

Ecuația normalei este

$$y = \frac{1}{9}(x + 2) - 2, \quad \text{adică} \quad y = \frac{1}{9}x - \frac{16}{9}.$$

Exemplul 2. Fie $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Domeniul de definiție al funcției este $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Observăm că în punctul $x_0 = 0$ funcția nu este derivabilă, dar are derivatele laterale infinite

$$f'_-(0) = -\infty, \quad f'_+(0) = +\infty.$$

Deci, în acest punct tangenta la graficul funcției este verticală.

Exemplul 3. Fie

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Considerăm $x_0 = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Deci în punctul cu abscisa $x_0 = 0$ nu există tangenta la graficul funcției date, dar există tangentele laterale în acest punct, care formează un unghi, un așa punct se numește *punct unghiular* al graficului funcției.

4.3.2 Sensul geometric al diferențialei funcției de o variabilă reală

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ o funcție derivabilă în x_0 și fie $f'(x_0) \neq 0$. Fie $A(x_0, f(x_0))$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ două puncte de pe graficul acestei funcții.

Creșterea funcției la „trecerea” din punctul A în punctul B este

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = BD.$$

Notăm cu C punctul de intersecției cu dreapta BD a tangentei dusă la graficul funcției în punctul A . Avem

$$CD = AD \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = df(x_0).$$

În așa fel, concludem că *diferențiala funcției $f(x)$ în punctul x_0 este egală cu creșterea ordonatei punctului tangentei dusă la graficul funcției $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ la trecerea de la punctul cu abscisa x_0 la punctul cu abscisa $x_0 + \Delta x$.*

4.3.3 Sensul fizic al derivatei și diferențialei funcției de o variabilă reală

Sensul fizic al derivatei. Fie că un punct material se mișcă rectiliniu și legea mișcării este definită de funcția $s = s(t)$. Atunci viteza instantanee a punctului material în momentul de timp $t = t_0$ este

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Exemplu. Să calculăm viteza instantanee a unui automobil în momentul de timp $t = 5$ (ore) a cărui poziție în momentul t este determinată de funcția $s(t) = t^3 - 4t^2 + 10$ (km).

Avem

$$v(5) = s'(5) = (3t^2 + 8t)|_{t=5} = 3 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 = 115 \quad (\text{km/h}).$$

Sensul fizic al diferențialei. Așa cum

$$ds(t_0; \Delta t) = s'(t_0) \cdot \Delta t = v(t_0) \cdot \Delta t$$

concludem că $ds(t_0; \Delta t)$ este distanța pe care ar fi parcurs-o punctul material în intervalul de timp $(t_0, t_0 + \Delta t)$ dacă s-ar fi mișcat cu viteză constantă egală cu viteza instantanee în momentul t_0 de timp.

4.4 Derivata funcției inverse

4.4.1 Existența și calculul derivatei funcției inverse

Teorema 4.5. *Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă strict crescătoare (descrescătoare) derivabilă în punctul $x_0 \in I$ cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}(y)$ are derivată în*

punctul $y_0 = f(x_0)$ și are loc formula

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pe scurt ultima formulă se notează

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Demonstrație. Fie imaginea intervalului I prin funcția f este intervalul Y . Conform teoremei despre existența funcției inverse, pe intervalul Y există și este continuă funcția $x = f^{-1}(y)$ inversă funcției $y = f(x)$.

Fixăm $x_0 \in I$ și îi dăm o creștere Δx a.î. $x_0 + \Delta x \in I$. Acestei creșteri îi corespunde creșterea funcției

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

de aici

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \in Y,$$

și

$$\Delta f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0 + \Delta x)) - f^{-1}(f(x_0)) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x.$$

În plus, din continuitatea funcțiilor avem că $\Delta x \rightarrow 0$ dacă și numai dacă $\Delta y \rightarrow 0$. Si deci

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Deci

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

4.4.2 Sensul geometric al derivatei funcției inverse

Fie că au loc condițiile din Teorema 4.5. După cum se cunoaște derivata $f'(x_0)$ este egală cu panta tangentei, adică cu tangenta unghiului α format cu direcția pozitivă a axei Ox de către tangenta dusă la graficul funcției $y = f(x)$ în punctul cu abscisa x_0 . Dar funcția inversă $x = f^{-1}(y)$ are același grafic, doar că variabila independentă pentru ea este y și se depune pe axa Oy . De aceea derivata $(f^{-1})'(y_0)$ este egală cu tangenta unghiului β format cu direcția pozitivă a axei Oy de către aceeași dreaptă tangentă.

Astfel formula dedusă în Teorema 4.5 se reduce la relația cunoscută:

$$\text{dacă } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{atunci } \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

4.4.3 Calculul derivatelor funcțiilor trigonometrice inverse

1. $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Funcția inversă este $x = \sin y$.

$$x'_y = \cos y, \quad \text{pentru } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avem } x'_y = \cos y > 0.$$

Deci

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

2. $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$. Funcția inversă este $x = \cos y$.

$$x'_y = -\sin y, \quad \text{pentru } y \in (0, \pi) \quad \text{avem } x'_y = -\sin y < 0.$$

Deci

$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

3. $y = \arctg x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcția inversă este $x = \operatorname{tg} y$.

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}, \quad \text{pentru } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avem } x'_y > 0.$$

Deci

$$(\arctg x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4. $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, \pi)$. Funcția inversă este $x = \operatorname{ctg} y$.

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}, \quad \text{pentru } y \in (0, \pi) \quad \text{avem } x'_y < 0.$$

Deci

$$(\operatorname{arcctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4.5 Derivata și diferențiala funcției compuse

4.5.1 Existența și calculul derivatei funcției compuse

Teorema 4.6 (Regula lanțului). *Dacă funcția $u = u(x)$ are derivată în punctul x_0 , iar funcția $y = f(u)$ are derivată în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcția compusă $y = f(u(x))$ are derivată în punctul x_0 și are loc formula*

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Ultima formulă poate fi scrisă în formele

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{sau} \quad y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

Cu alte cuvinte, derivata funcției compuse este egală cu produsul dintre derivata funcției în raport cu variabila intermediară și derivata variabilei intermediare în raport cu variabila independentă.

Demonstrație. Deoarece funcția $u = u(x)$ este derivabilă în x_0 rezultă că ea este definită într-o vecinătate $U(x_0)$ a acestui punct și

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0).$$

Deoarece funcția $y = f(u)$ este derivabilă în punctul $u_0 = u(x_0)$ rezultă că ea este definită într-o vecinătate a punctului u_0 și deci are sens funcția compusă $f(u(x))$ și putem pune problema despre existența și calculul derivatei ei în punctul x_0 .

Deoarece $f(u)$ este derivabilă în punctul u_0 , ea este și diferențiabilă în acest punct și

$$\Delta y = f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u, \quad \text{unde} \quad \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0. \quad (4.1)$$

Vom considera $\alpha(0) = 0$. Cu o astfel de convenție relația (4.1) rămâne adevărată, iar funcția $\alpha(\Delta u)$ devine continuă pentru $\Delta u = 0$. Îi dăm lui x_0 o creștere Δx . Ea va implica creșterea Δu a funcției $u = u(x)$ care la rândul său va implica creșterea Δy a funcției $y = f(u)$ care se exprimă prin Δu după formula (4.1).

Dar Δy este în același timp creșterea funcției compuse $y = f(u(x))$ care corespunde creșterii Δx a variabilei x în punctul x_0 .

Împărțim egalitatea (4.1) la Δx ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Trecem la limită în ultima egalitate cu $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= f'(u_0) \cdot u'(x_0) + u'(x_0) \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Aici am folosit faptul că atunci când $\Delta x \rightarrow 0$, din continuitatea funcției $u = u(x)$ avem că $\Delta u \rightarrow 0$ și deoarece $\alpha(\Delta u)$ este continuă în $\Delta u = 0$ avem

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = \alpha(0) = 0.$$

În așa fel,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

□

Exemplul 1. $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \cos 3x$.

Exemplul 2.

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}^3(2x - 5))' &= 3\operatorname{tg}^2(2x - 5) \cdot (\operatorname{tg}(2x - 5))' = \\ &= 3\operatorname{tg}^2(2x - 5) \cdot \frac{1}{\cos^2(2x - 5)} \cdot (2x - 5)' = \frac{6}{\cos^2(2x - 5)} \operatorname{tg}^2(2x - 5). \end{aligned}$$

Exemplul 3. Să calculăm derivata funcției $y = \operatorname{ch}x$.

$$(\operatorname{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x} \cdot (-x)') = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh}x.$$

Exerciții. Demonstrați formulele

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh}x)' &= \operatorname{ch}x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ (\operatorname{th}x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ (\operatorname{cth}x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}, \quad x \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

4.5.2 Diferențiala funcției compuse. Invarianța formei ei

Dacă funcția $u = u(x)$ are derivată în punctul x_0 , iar funcția $y = f(u)$ are derivată în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcția compusă $y = f(u(x))$ are derivată în punctul x_0 și are loc formula

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Dar atunci diferențiala funcției compuse este

$$dy(x_0; dx) = y'(x_0) \cdot dx = f'(u_0) \cdot u'(x_0) \cdot dx = f'(u_0) \cdot du(u_0; dx).$$

Deci forma de înscriere a diferențialei funcției compuse nu depinde de aceea dacă este u variabilă independentă sau la rândul său ea însăși este funcție de o altă variabilă. De aceea formula

$$dy = f'(u)du$$

se numește *forma invariantă* de înscriere a diferențialei funcției compuse.

4.5.3 Diferențierea logaritmică

Să studiem funcția

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{dacă } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Domeniul de definiție al ei este $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Deoarece

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x},$$

obținem

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Aplicând regula lanțului avem

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Definiția 4.6. Raportul $\frac{f'(x)}{f(x)}$ se numește *derivata logaritmică* a funcției $f(x)$.

Metoda diferențierii logaritmice constă în aceea că mai întâi se află derivata logaritmică și apoi se află însăși derivata funcției după formula

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).$$

Exemplul 1. Fie $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\ln|x^\alpha| = \alpha \cdot \ln|x|, \quad \text{deci } f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 2. Fie

$$y = \frac{(x+2)^5 \cdot 2^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^3)^5}}.$$

Avem

$$\ln|y| = 5 \ln|x+2| + \sin x \cdot \ln 2 - \frac{5}{2} \ln|1+x^3|.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{x+2} + \cos x \cdot 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{3x^2}{1+x^3},$$

deci

$$y' = \left(\frac{5}{x+2} + 2 \cos x - \frac{5}{2} \cdot \frac{3x^2}{1+x^3} \right) \cdot \frac{(x+2)^5 \cdot 2^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^3)^5}}.$$

Exercițiu. Calculați derivata funcției $y = x^{\cos x}$.

4.5.4 Derivarea funcțiilor definite parametric

Fie funcțiile $x = x(t)$ și $y = y(t)$ definite într-o vecinătate a punctului t_0 și $x(t)$ este continuă și strict monotonă. Atunci există funcția inversă ei $t = t(x)$ și într-o vecinătate a punctului $x_0 = x(t_0)$ are sens funcția compusă $y = y(t(x))$, care se numește funcție definită parametric de formulele

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in U(t_0). \end{cases}$$

Teorema 4.7. *Dacă funcțiile $x = x(t)$ și $y = y(t)$ sunt derivabile în punctul t_0 , adică există $x'(t_0)$ și $y'(t_0)$ și dacă în plus $x'(t_0) \neq 0$, atunci funcția definită parametric $y = y(t(x))$ este derivabilă în punctul $x_0 = x(t_0)$ și are loc formula*

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)},$$

sau pe scurt

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Într-adevăr, aplicând regula lanțului și teorema despre derivata funcției inverse avem

$$y'_x = (y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Exercițiu. Aflați y'_x dacă funcția y este definită parametric de ecuațiile

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t, \\ y(t) = e^t \cos t. \end{cases}$$

4.5.5 Derivarea funcțiilor definite implicit

Fie că funcția $y = y(x)$ este definită implicit de ecuația

$$F(x, y) = 0.$$

Aici $F(x, y(x))$ este o funcție compusă și dacă există derivata $y'(x)$ atunci ea poate fi calculată derivând identitatea $F(x, y) = 0$ în raport cu x după regula lanțului.

Exemplu. Fie că funcția $y(x)$ este definită implicit de ecuația

$$x^2 y^3 + xy - 13 = 0.$$

Să aflăm derivata y' . Pentru aceasta derivăm ecuația dată ținând cont de faptul că y este funcție de x . Avem

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + y + x \cdot y' = 0,$$

de unde aflăm

$$(3x^2 y^2 + x)y' = -(2xy^3 + y)$$

și deci

$$y' = -\frac{2xy^3 + y}{3x^2 y^2 + x}.$$

4.6 Derivate și diferențiale de ordin superior

4.6.1 Definiția derivatelor de ordin superior

Definiția 4.7. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție a cărei derivată există în fiecare punct din I . Dacă funcția $f'(x)$ este la rândul său derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, atunci spunem că funcția f este de două ori derivabilă în x_0 . În acest caz $(f')'(x_0)$ se numește *derivata a doua* a funcției f în x_0 și se notează $f''(x_0)$. Deci

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) \quad \text{sau} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) (x_0).$$

Procedând prin recurență, spunem că funcția f este de k ori derivabilă în punctul x_0 , dacă funcția $f^{(k-1)}(x)$ este derivabilă în x_0 . Deci

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0) \quad \text{sau} \quad \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} \right) (x_0).$$

Când afirmăm că o funcție f este de k ori derivabilă într-un punct x_0 subînțelegem că f are toate derivatele până la ordinul $k - 1$ inclusiv, pe o vecinătate a lui x_0 și că derivata de ordinul $k - 1$ este derivabilă în x_0 .

O funcție f se numește *infiniț derivabilă în x_0* dacă ea admite derivate de orice ordin în acest punct.

Funcțiile elementare sunt infiniț derivabile în orice punct interior mulțimii lor de definiție.

Definiția 4.8. O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *continuu derivabilă de k ori* sau *de clasă C^k* pe intervalul I dacă f are toate derivatele până la ordinul k pe I și derivata de ordinul k este continuă pe I .

Mulțimea funcțiilor de clasă C^k pe intervalul I se notează $C^k(I)$.

Prin $C^0(I) = C(I)$ se înțelege mulțimea funcțiilor continue pe I .

Prin $C^\infty(I)$ se notează mulțimea funcțiilor infiniț derivabile pe I .

Exemple.

i) Fie $y = 2x^4 + 3x^2 + 1$. Să calculăm y''' . Avem

$$y' = 8x^3 + 6x, \quad y'' = (y')' = 24x^2 + 6, \quad y''' = (y'')' = 48x.$$

ii) Fie $y = a^x$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem

$$(a^x)^{(k)} = a^x \cdot (\ln a)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

În particular

$$(e^x)^{(k)} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exerciții. Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc formulele

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

4.6.2 Derivatele de ordinul n ale sumei a două funcții și ale produsului a două funcții

Teorema 4.8. *Dacă $u \in C^n(I)$ și $v \in C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(u \pm v) \in C^n(I)$ și are loc formula*

$$(u \pm v)^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Demonstrație. Demonstrăm teorema prin inducție.

Pentru $n = 1$ avem

$$(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x),$$

ceea ce a fost demonstrat mai sus.

Admitem că formula are loc pentru $n = k$, adică avem

$$(u \pm v)^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) \pm v^{(k)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Fie $n = k + 1$. Conform definiției derivatei de ordinul $k + 1$ avem

$$(u \pm v)^{(k+1)}(x) = ((u \pm v)^{(k)})'(x) = (u^{(k)}(x) \pm v^{(k)}(x))' = u^{(k+1)}(x) \pm v^{(k+1)}(x).$$

□

Teorema 4.9 (Formula lui Leibniz). *Dacă $u \in C^n(I)$ și $v \in C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(u \cdot v) \in C^n(I)$ și are loc formula*

$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Demonstrație. Demonstrăm teorema prin inducție.

Pentru $n = 1$ avem

$$(u \cdot v)' = u'v + uv',$$

ceea ce a fost demonstrat mai sus.

Admitem că formula are loc pentru $n = k$.

Să demonstrăm că formula lui Leibniz are loc și pentru $n = k + 1$. Avem

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = ((u \cdot v)^{(k)})' = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right)'$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \\
&= C_n^0 u^{(n+1)} v + C_n^1 u^{(n)} v' + C_n^2 u^{(n-1)} v^{(2)} + \dots + C_n^n u' v^{(n)} + \\
&+ C_n^0 u^{(n)} v' + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(2)} + \dots + C_n^{n-1} u' v^{(n)} + C_n^n u v^{(n+1)} = \\
&= u^{(n+1)} v + (C_n^0 + C_n^1) u^{(n)} v' + (C_n^1 + C_n^2) u^{(n-1)} v^{(2)} + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) u' v^{(n)} + u v^{(n+1)} = \\
&= u^{(n+1)} v + C_{n+1}^1 u^{(n)} v' + C_{n+1}^2 u^{(n-1)} v^{(2)} + \dots + C_{n+1}^n u' v^{(n)} + u v^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n-k)} v^{(k)}.
\end{aligned}$$

Aici am folosit formula $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

□

Exemplu. Fie $f(x) = x^2 e^{3x}$. Să se calculeze $f^{(10)}(x)$.

Vom aplica formula lui Leibniz.

$$f^{(10)}(x) = x^2 \cdot 3^{10} e^{3x} + 1 \cdot 2x \cdot 3^9 e^{3x} + 45 \cdot 2 \cdot 3^8 e^{3x} = 3^9 e^{3x} (3x^2 + 20x + 30).$$

Exercițiu. Fie $f(x) = x^2 \sin x$. Să se calculeze $f^{(20)}(x)$.

4.6.3 Derivatele de ordin superior ale funcției compuse

Teorema 4.10. Dacă funcția $u = u(x)$ are derivată de ordinul doi în punctul x_0 și funcția $y = f(u)$ are derivată de ordinul doi în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcția compusă $y = f(u(x))$ are derivată de ordinul doi în punctul x_0 și are loc formula

$$f''(x_0) = f''(u_0) \cdot (u'(x_0))^2 + f'(u_0) \cdot u''(x_0).$$

Pe scurt această formulă se scrie

$$y''_{xx} = y''_{uu} \cdot (u'_x)^2 + y'_u \cdot u''_{xx}.$$

Demonstrație. Din existența derivatelor $u''(x_0)$ și $y''(u_0)$ rezultă existența primelor derivate $u'(x)$ și $y'(u)$ într-o anumită vecinătate a punctelor x_0 și u_0 corespunzător. Prin urmare funcțiile $u(x)$ și $y(u)$ sunt continue în punctele x_0 și u_0 corespunzător. Deci în vecinătatea punctului x_0 are sens funcția compusă $y(u(x))$. Avem

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

iar de aici obținem

$$y''_{xx} = (y'_u \cdot u'_x)'_x = (y'_u)'_x \cdot u'_x + y'_u \cdot u''_{xx} = y''_{uu} \cdot (u'_x)^2 + y'_u \cdot u''_{xx}.$$

□

Exemplu. Să se demonstreze că funcția $y = \sqrt{2x - x^2}$ satisface ecuația $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Fie $u = 2x - x^2$, atunci $u' = 2 - 2x$, $u'' = -2$. Avem $y = \sqrt{u}$ și deci $y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ și $y''_{uu} = -\frac{1}{4u\sqrt{u}}$. În așa fel

$$\begin{aligned} y^3 \cdot y'' + 1 &= u\sqrt{u} \left(-\frac{1}{4u\sqrt{u}} \cdot 4(1-x)^2 + \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2) \right) + 1 = \\ &= -(1-x)^2 - u + 1 = -1 + 2x - x^2 - 2x + x^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

4.6.4 Derivatele de ordin superior ale funcțiilor definite parametric

Fie funcțiile $x = x(t)$ și $y = y(t)$ definite într-o vecinătate a punctului t_0 și $x(t)$ este continuă și strict monotonă. Într-o vecinătate a punctului $x_0 = x(t_0)$ are sens funcția compusă $y = y(t(x))$, care se numește funcție definită parametric de formulele

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in U(t_0). \end{cases}$$

Teorema 4.11. *Dacă funcțiile $x = x(t)$ și $y = y(t)$ sunt derivabile de două ori în punctul t_0 , adică există $x''(t_0)$ și $y''(t_0)$ și dacă în plus $x'(t_0) \neq 0$, atunci funcția definită parametric $y = y(t(x))$ este derivabilă de două ori în punctul $x_0 = x(t_0)$ și are loc formula*

$$y''(x_0) = \frac{y''(t_0) \cdot x'(t_0) - x''(t_0) \cdot y'(t_0)}{(x'(t_0))^3}$$

sau pe scurt

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Demonstrație. Aplicând regula lanțului și teorema despre derivata funcției parametrice avem

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_x = \frac{(y'_t)'_x x'_t - (x'_t)'_x y'_t}{(x'_t)^2} = \\ &= \frac{y''_{tt} t'_x x'_t - x''_{tt} t'_x y'_t}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt} - x''_{tt} \cdot \frac{y'_t}{x'_t}}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}. \end{aligned}$$

□

Exercițiu. Aflați y''_{xx} dacă funcția y este definită parametric de ecuațiile

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t, \\ y(t) = e^t \cos t. \end{cases}$$

4.6.5 Derivatele de ordin superior ale funcției inverse

Teorema 4.12. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă strict crescătoare (descrescătoare) derivabilă de două ori în punctul $x_0 \in I$ cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1}(y)$ este derivabilă de două ori în punctul $y_0 = f(x_0)$ și are loc formula

$$(f^{-1})''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}.$$

Pe scurt ultima formulă se notează

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

Demonstrație. Conform Teoremei 4.5 avem

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Ca urmare

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y = -\frac{1}{(y'_x)^2} \cdot y''_{xx} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

□

4.6.6 Diferențialele de ordin superior ale unei funcții. Nevalabilitatea invarianței formei diferențialei pentru diferențialele de ordin superior

Definiția 4.9. Spunem că o funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori diferențiabilă în punctul x_0 dacă funcția $df(x; \Delta x) = f'(x)\Delta x$ este diferențiabilă în punctul x_0 oricare ar fi $\Delta x \in \mathbb{R}$.

Dacă f este de două ori diferențiabilă în x_0 , atunci aplicația

$$d^2 f(x_0; \Delta x) = d(df)(x_0; \Delta x) = d(f'(x)\Delta x)(x_0; \Delta x) = (f'(x) \cdot \Delta x)'(x_0) \cdot \Delta x = f''(x_0)(\Delta x)^2$$

se numește *diferențiala a doua* a funcției f în punctul x_0 .

Definiția 4.10. O funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ este de k ori diferențiabilă în punctul x_0 dacă diferențiala de ordinul $k - 1$ a funcției f , adică

$$d^{k-1} f(x; \Delta x) = f^{(k-1)}(x)(\Delta x)^{k-1}$$

este diferențiabilă în punctul x_0 oricare ar fi $\Delta x \in \mathbb{R}$.

În acest caz aplicația

$$\begin{aligned} d^k f(x_0; \Delta x) &= d(d^{k-1} f)(x_0; \Delta x) = d(f^{(k-1)}(x)(\Delta x)^{k-1})(x_0; \Delta x) = \\ &= (f^{(k-1)}(x) \cdot (\Delta x)^{k-1})'(x_0) \cdot \Delta x = f^{(k)}(x_0)(\Delta x)^k \end{aligned}$$

se numește *diferențiala de ordinul k* a funcției f în punctul x_0 .

Teorema 4.13. *O funcție $f : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ este de k ori diferențiabilă în punctul x_0 dacă și numai dacă f este de k ori derivabilă în x_0 .*

Deoarece $\Delta x = dx$, putem scrie

$$d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0) dx^k.$$

Dacă funcția $u = u(x)$ este diferențiabilă de două ori în punctul x_0 , iar funcția $y = f(u)$ este diferențiabilă de două ori în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcția compusă $y = f(u(x))$ este diferențiabilă de două ori în punctul x_0 și avem

$$\begin{aligned} d^2 y(x_0; dx) &= d(dy)(x_0; dx) = d(y'(u) \cdot u'(x) \cdot dx)(x_0; dx) = \\ &= y''(u_0) \cdot (u'(x_0))^2 dx^2 + y'(u_0) \cdot u''(x_0) dx^2 = y''(u_0) (du(x_0; dx))^2 + y'(u_0) d^2 u(x_0; dx). \end{aligned}$$

Deci forma de înscriere a diferențialei de ordinul doi a funcției compuse nu posedă forma invariantă de înscriere, adică depinde de aceea dacă este u variabilă independentă sau la rândul său ea însăși este funcție de o altă variabilă.

Nici diferențialele de ordin $k \geq 2$ nu au această proprietate. De exemplu, pentru funcții diferențiabile de trei ori, putem deduce formula

$$d^3 y = f'''(u) du^3 + 3f''(u) du \cdot d^2 u + f'(u) d^3 u.$$

Capitolul 5

Teoremele de bază ale calculului diferențial

5.1 Teoremele de medie

5.1.1 Teorema Fermat

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Definiția 5.1. Punctul $x_0 \in I$ se numește *punct de extrem local* sau *relativ* al funcției f dacă există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât diferența $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I \cap U$. Dacă:

$f(x) - f(x_0) \leq 0$, $\forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numește *punct de maxim local*,

$f(x) - f(x_0) \geq 0$, $\forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numește *punct de minim local*.

Dacă diferența $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I$, atunci x_0 se numește *punct de extrem absolut* sau *global*.

Remarcă. Orice punct de extrem absolut este punct de extrem relativ. Reciproca nu este adevărată.

Teorema 5.1 (Teorema lui Fermat). Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ și x_0 un punct de extrem al funcției f , interior lui I . Dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0 , atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație. Fie că punctul x_0 din interiorul intervalului I este un punct de maxim local al funcției f , atunci există o vecinătate $U(x_0)$ a lui x_0 astfel încât

$$\forall x \in U(x_0) \quad \text{avem} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Conform ipotezei există derivata $f'(x_0)$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Fie $x = x_0 + \Delta x$, atunci dacă $\Delta x \rightarrow 0$ avem $x \rightarrow x_0$, adică

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (5.1)$$

și această limită nu depinde de modul în care se apropie x de x_0 , din stânga sau din dreapta. Dar pentru $x < x_0$ avem $x - x_0 < 0$ și

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad (5.2)$$

deoarece $f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in U(x_0)$.

Pentru $x > x_0$ avem $x - x_0 > 0$ și

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (5.3)$$

Trecând la limită în inegalitățile (5.2) și (5.3) cu $x \rightarrow x_0$ ținând cont de (5.1) obținem

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0, \\ f'(x_0) \leq 0. \end{cases}$$

Ceea ce este posibil doar atunci când $f'(x_0) = 0$.

□

Sensul geometric al Teoremei Fermat:

În condițiile teoremei Fermat, tangenta dusă la graficul funcției $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox (deoarece $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = 0$).

Remarcă. În demonstrația teoremei esențial este faptul că x_0 este un punct din interiorul intervalului I . Fără această ipoteză, teorema nu mai este adevărată: dacă funcția f definită pe un segment atinge extremul său în una din extremitățile segmentului, atunci derivata funcției, dacă există, poate să fie diferită de zero.

Exemplu.

Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$. Avem

$$f_{\min} = f(0) = 0, \quad f_{\max} = f(1) = 1,$$

dar $f'(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1]$, deci $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Teorema lui Fermat este o condiție *necesară* de extrem.

Definiția 5.2. Un punct $x_0 \in I$ se numește *punct staționar* al funcției $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dacă f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile sunt puncte staționare.

5.1.2 Teorema Rolle

Teorema 5.2 (Teorema lui Rolle). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

- (1) f este continuă pe $[a, b]$,
- (2) f este derivabilă pe (a, b) ,
- (3) $f(a) = f(b)$,

atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă pe segmentul $[a, b]$, conform Teoremei lui Weierstrass, atinge pe el valorile sale maximă M și minimă m . Sunt posibile două cazuri:

1. $M = m$. În acest caz, $f(x) \equiv \text{const}$ și deci $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

2. $M > m$. În acest caz cel puțin unul dintre numerele M sau m este diferit de valoarea comună $f(a) = f(b)$. Fie de exemplu $M \neq f(a)$. Atunci maximum funcției f pe segmentul $[a, b]$ se atinge într-un punct $c \in (a, b)$ și deci c este un punct de extrem global pentru f și conform Teoremei lui Fermat avem $f'(c) = 0$. Analogic analizăm cazul când $m \neq f(a)$. □

Sensul geometric al Teoremei Rolle:

Dacă ordonatele extremităților curbei $y = f(x)$ sunt egale, atunci pe curbă există cel puțin un punct în care tangenta este paralelă cu axa Ox .

Remarca 1. Toate cele trei condiții din ipoteza Teoremei lui Rolle sunt esențiale.

Exemplul 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - [x]$. Funcția f satisface condițiile (2) și (3) din teoremă, dar ea nu satisface condiția (1), așa cum f este discontinuă în punctul $x_0 = 1$. Observăm că $f'(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$ și deci Teorema lui Rolle nu are loc.

Exemplul 2. Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Funcția f satisface condițiile (1) și (3) din teoremă, dar ea nu satisface condiția (2), așa cum f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$. Avem $f'(x) = -1$, dacă $-1 \leq x < 0$ și $f'(x) = 1$, dacă $0 < x \leq 1$. Teorema lui Rolle nu are loc.

Exemplul 3. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$. Funcția f satisface condițiile (1) și (2) din teoremă, dar ea nu satisface condiția (3). Avem $f'(x) = 1, \forall x \in [0, 1]$ și deci Teorema lui Rolle nu are loc.

Remarca 2. Teorema lui Rolle afirmă numai existența punctului $c \in (a, b)$, fără nici o precizare asupra unicității acestuia.

5.1.3 Teorema Lagrange

Teorema 5.3 (Teorema lui Lagrange). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

- (1) f este continuă pe $[a, b]$,
- (2) f este derivabilă pe (a, b) ,

atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstrație. Să considerăm o funcție ajutătoare

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

și să determinăm valoarea parametrului λ în așa fel încât funcția F să satisfacă ipoteza Teoremei lui Rolle. Observăm că primele două condiții au loc pentru orice valoare $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$F(a) = f(a) - \lambda a, \quad F(b) = f(b) - \lambda b$$

și dacă cerem satisfacerea condiției $F(a) = F(b)$ găsim

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

În așa fel funcția

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

satisfacă ipoteza Teoremei lui Rolle și deci

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{a.î.} \quad F'(c) = 0,$$

dar

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

și deci

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Sensul geometric al Teoremei lui Lagrange:

Mărimea $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ este egală cu tangenta unghiului format cu direcția pozitivă a axei Ox de către coarda care unește punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ de pe graficul funcției $y = f(x)$. Mărimea $f'(c)$ este tangenta unghiului format cu direcția pozitivă a axei Ox de către tangenta dusă la graficul funcției $y = f(x)$ în punctul cu abscisa c . Teorema lui Lagrange afirmă, că pe graficul funcției $y = f(x)$ există un punct C în care tangenta la curba respectivă este paralelă cu coarda AB .

Remarcă. Teorema lui Lagrange afirmă numai existența punctului $c \in (a, b)$, fără nici o precizare asupra unicității acestuia.

Din Teorema lui Lagrange rezultă că dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe I , atunci oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, există un punct ξ de forma $\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$, cu $\theta \in (0, 1)$, astfel încât

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2).$$

În particular, dacă $a, a + h \in I$, avem

$$f(a + h) = f(a) + f'(\xi) \cdot h, \quad \xi = a + \theta h, \quad \theta \in (0, 1).$$

Teorema lui Lagrange se numește *prima teoremă de medie* a calculului diferențial sau *teorema creșterilor finite*.

Corolar. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe $I \subset \mathbb{R}$ și $f'(x) = 0$ pe I , atunci f este constantă pe I .

Într-adevăr oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, există un punct ξ de forma

$$\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1),$$

cu $\theta \in (0, 1)$, astfel încât

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2) = 0.$$

Astfel $f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$ și deci funcția f este constantă pe I .

De aici rezultă că dacă $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $I \subset \mathbb{R}$ și $f'(x) = g'(x)$ pe I , atunci f și g diferă printr-o constantă pe I .

5.1.4 Teorema Cauchy

Teorema 5.4 (Teorema lui Cauchy). Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

- (1) f este continuă pe $[a, b]$,
- (2) f este derivabilă pe (a, b) ,
- (3) $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$,

atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstrație. Remarcăm că în condițiile teoremei avem $g(a) \neq g(b)$, deoarece în caz contrar aplicând la funcția g Teorema lui Rolle, ar exista un punct $c \in (a, b)$ a.î. $g'(c) = 0$, ceea ce contrazice condiția (3).

Să considerăm funcția ajutătoare

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

și să determinăm valoarea parametrului λ în așa fel încât funcția F să satisfacă ipoteza Teoremei lui Rolle. Observăm că primele două condiții au loc pentru orice valoare $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a), \quad F(b) = f(b) - \lambda g(b)$$

și dacă cerem satisfacerea condiției $F(a) = F(b)$ găsim

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

În așa fel funcția

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

satisfacă ipoteza Teoremei lui Rolle și deci

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{a.î.} \quad F'(c) = 0,$$

dar

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

și deci

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Teorema lui Cauchy se numește *a doua teoremă de medie* a calculului diferențial.

Teorema 5.5 (Teorema lui Darboux). *Dacă funcția f este derivabilă pe I , atunci funcția f' are proprietatea lui Darboux pe I , adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.*

5.2 Ridicarea nedeterminărilor (regulile lui l'Hospital)

5.2.1 Ridicarea nedeterminărilor de forma $\frac{0}{0}$

Teorema 5.6 (Regula lui l'Hospital). *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in [a, b]$. Dacă:*

- (1) f și g sunt derivabile pe $(a, b) \setminus \{x_0\}$ și continue în x_0 ,
- (2) $f(x_0) = 0, \quad g(x_0) = 0$,
- 3) $g'(x) \neq 0$, într-o vecinătate găurită a lui x_0 ,
- 4) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$,

atunci există și limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Demonstrație. Pentru orice $x \in [a, b]$ funcțiile f și g satisfac ipoteza Teoremei lui Cauchy pe segmentul cu extremitățile în punctele x și x_0 . Deci, există un punct c_x situat între x și x_0 astfel încât are loc egalitatea

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Dacă $x \rightarrow x_0$, atunci $c_x \rightarrow x_0$ și conform condiției (4) există limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \rightarrow x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lambda.$$

□

Remarcăm că nu este necesar ca funcțiile f și g să aibă derivată în însăși punctul x_0 . În plus, observăm că aici se includ și cazurile când $\lambda = -\infty$ și $\lambda = +\infty$.

Exemplu. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{2x - 2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{2x - 2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Remarcă. Dacă funcțiile f și g au derivate de ordin superior, care la rândul său satisfac ipoteza teoremei de mai sus și de exemplu $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, atunci putem aplica regula lui l'Hospital pentru câtul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplu. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{-\sin x} = \left| \frac{0}{0} \right| = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{\cos x} = -2.$$

Teorema 5.7 (Regula lui l'Hospital). Fie $f, g : (c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă:

(1) f și g sunt derivabile pe $(c, +\infty)$,

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (c, +\infty)$,

4) $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$,

atunci există și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Demonstrație. Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$. Dacă $x \rightarrow +\infty$ atunci $t \rightarrow 0$.

Intervalul $(c, +\infty)$ se aplică pe intervalul $\left(0, \frac{1}{c}\right)$. Pe intervalul $\left(0, \frac{1}{c}\right)$ au sens funcțiile compuse

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \quad \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right),$$

care sunt diferențiabile pe intervalul $\left(0, \frac{1}{c}\right)$. Avem

$$\varphi'(t) = \left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right); \quad \psi'(t) = \left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right).$$

În plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Așa cum $g'(x) \neq 0, \forall x \in (c, +\infty)$, avem $\psi'(t) \neq 0, \forall t \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$. Astfel avem

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Așadar, sunt satisfăcute condițiile Teoremei 5.6 și deci $\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lambda$, dar

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

□

Exemplu. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 2 \cdot 1 = 2.$$

5.2.2 Ridicarea nedeterminărilor de forma $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 5.8 (Regula lui l'Hospital). Fie date două funcții f și g . Dacă

(1) f și g sunt diferențiabile într-o vecinătate a punctului finit sau infinit x_0 (în particular, în vecinătatea din stânga sau din dreapta) cu excepția posibilă a punctului x_0 ,

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$,

(3) $g'(x) \neq 0$, în vecinătatea lui x_0 ,

(4) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplul 1. Fie $\alpha > 0$. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Deci, dacă $\alpha > 0$, atunci funcția putere x^α crește mai repede decât funcția logaritmică, când $x \rightarrow +\infty$.

Exemplul 2. Fie $\alpha > 0, a > 0, a \neq 1$. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{a^x \cdot \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha - [\alpha] - 1)x^{\alpha - [\alpha] - 1}}{a^x \cdot (\ln a)^{[\alpha] + 1}} = 0.$$

Deci, dacă $\alpha > 0$, atunci funcția putere x^α crește mai încet decât funcția exponențială, când $x \rightarrow +\infty$.

5.2.3 Ridicarea nedeterminărilor de formele $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .

În alte cazuri nedeterminate, așa ca:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

nu există reguli de tipul regulilor lui l'Hospital. Aceste cazuri, cu ajutorul transformărilor echivalente, trebuie reduse la cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplul 1. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^{-\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^{-\infty} = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0.$$

Exemplul 2. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) = |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x) = -1.$$

Exemplul 3. Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln x \cdot \frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = -1.$$

5.3 Formula lui Taylor

5.3.1 Formula lui Taylor pentru un polinom

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

un polinom de grad n înscris după puterile lui x .

Polinomul $P(x)$ poate fi scris după puterile diferenței $x - x_0$, oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, fie $t = x - x_0$, atunci $x = t + x_0$ și deci

$$P(t + x_0) = a_0 + a_1(t + x_0) + a_2(t + x_0)^2 + \cdots + a_n(t + x_0)^n.$$

Ridicând termenii din membrul drept al ultimei egalități la puterile respective și grupând termenii cu puterile egale ale lui t vom obține

$$P(t + x_0) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n.$$

Revenind la variabila x , definitiv avem

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n.$$

Să aflăm coeficienții b_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Observăm că

$$P(x_0) = b_0.$$

Din

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + \cdots + nb_n(x - x_0)^{n-1}$$

aflăm

$$P'(x_0) = b_1.$$

Din

$$P''(x) = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + \cdots + n \cdot (n - 1)b_n(x - x_0)^{n-2}$$

aflăm

$$P''(x_0) = 2b_2, \quad \text{de unde găsim } b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Derivând consecutiv polinomul $P(x)$ determinăm

$$P^{(n)}(x) = n(n - 1)(n - 2) \cdots 1 \cdot b_n = n!b_n, \quad \text{de unde găsim } b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

În așa fel coeficienții polinomului se exprimă prin valorile polinomului și ale derivatelor lui în punctul x_0 . Definitiv determinăm

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (5.4)$$

Formula (5.4) se numește *formula lui Taylor pentru polinom*.

Dacă $x_0 = 0$ obținem *formula lui Mac-Laurin*

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (5.5)$$

5.3.2 Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă reală

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Prin analogie cu formula (5.4) putem alcătui polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

pe care îl vom numi *polinomul lui Taylor de gradul n al funcției f în punctul x_0* .

Notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), x \in I$$

și numim această funcție *restul lui Taylor de ordinul n al funcției f în punctul x_0* .

Din egalitatea de mai sus avem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall x \in I,$$

adică

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x), \quad \forall x \in I. \quad (5.6)$$

Formula (5.6) se numește *formula lui Taylor de ordinul n a funcției f în punctul x_0* .

Dacă funcția $f(x)$ nu este un polinom, atunci $R_n(x) \neq 0$. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = 0,$$

pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0 , polinomul $T_n(x)$ aproximează funcția $f(x)$, adică $f(x) \approx T_n(x)$.

5.3.3 Forma lui Lagrange al restului lui Taylor

Vom considera în continuare că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este de $n + 1$ ori derivabilă pe I și vom determina forma restului lui Taylor. Vom căuta funcția $R_n(x)$ în forma

$$R_n(x) = \frac{M}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

unde $M = M(x)$ este o funcție de variabilă x care urmează a fi determinată.

Fixăm în mod arbitrar un punct $a \neq x_0$ în intervalul I și notăm $M(a) = M_0$. Atunci

$$R_n(a) = \frac{M_0}{(n + 1)!}(a - x_0)^{n+1}.$$

Prin urmare,

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(a - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(a - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(a - x_0)^n + \frac{M_0}{(n + 1)!}(a - x_0)^{n+1}. \quad (5.7)$$

Cu scopul de a afla valoarea M_0 să considerăm o funcție ajutătoare

$$F(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{M_0}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right).$$

Prin înlocuire ne convingem că

$$F(x_0) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Funcția $F(x)$ ca diferență dintre funcția $f(x)$ și un polinom este de asemenea derivabilă de $n+1$ ori pe intervalul I . Să calculăm aceste derivate.

$$F'(x) = f'(x) - \left(f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{M_0}{n!}(x - x_0)^n \right),$$

$$F''(x) = f''(x) - \left(f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \frac{M_0}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \right),$$

.....

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \left(f^{(n)}(x_0) + \frac{M_0}{1!}(x - x_0) \right),$$

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - M_0.$$

Observăm că

$$F(x_0) = F(a) = 0, F'(x_0) = 0, F''(x_0) = 0, \dots, F^{(n)}(x_0) = 0.$$

Funcția $F(x)$ satisface condițiile teoremei lui Rolle și deci între punctele x_0 și a se va găsi un punct ξ_1 astfel încât $F'(\xi_1) = 0$.

Deoarece $F'(x_0) = F'(\xi_1) = 0$, conform teotemei lui Rolle între punctele x_0 și ξ_1 , deci între punctele x_0 și a , se va găsi un punct ξ_2 astfel încât $F''(\xi_2) = 0$.

Prelungind raționamentul concludem că între punctele x_0 și a există un punct ξ_n astfel încât

$$F^{(n)}(\xi_n) = 0.$$

Deoarece $F^{(n)}(x_0) = 0$ și $F^{(n)}(\xi_n) = 0$ atunci între punctele x_0 și ξ_n , deci și între punctele x_0 și a există un punct ξ , astfel încât $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Dar $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - M_0$ și deci $M_0 = f^{(n+1)}(\xi)$. Înlocuind valoarea găsită pentru M_0 în (5.7) obținem

$$f(a) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(a-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(a-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(a-x_0)^{n+1}, \quad (5.8)$$

unde ξ este un punct dintre x_0 și a .

Deoarece a este un punct arbitrar al intervalului I în egalitatea (5.8) putem înlocui în loc de a punctul arbitrar x al intervalului. Obținem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (5.9)$$

unde ξ este un punct dintre x_0 și x .

Egalitatea (5.9) se numește *formula lui Taylor cu restul lui Taylor în forma lui Lagrange*,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

unde ξ este un punct situat între x_0 și x . Punctul ξ poate fi înscris în forma

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad \text{unde } 0 < \theta < 1,$$

deci

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

5.3.4 Forma lui Peano al restului lui Taylor

Să determinăm comportarea restului lui Taylor când x tinde la x_0 . Să admitem că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^n pe intervalul I . Înlocuind în formula (5.9) n cu $n-1$ obținem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Din continuitatea lui $f^{(n)}(x)$ în punctul x_0 avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0),$$

deci putem scrie

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x),$$

unde $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Dar atunci

$$\alpha(x) \cdot (x-x_0)^n = o((x-x_0)^n).$$

Definitiv obținem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (5.10)$$

aici restul lui Taylor are forma

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n). \quad (5.11)$$

De fapt forma restului este necunoscută, dar se știe că el este un infinit mic de ordin n în raport cu diferența $x - x_0$. Forma (5.11) a restului lui Taylor a fost indicată de către matematicianul italian Giuseppe Peano (27.08.1858 – 20.04.1932).

Dacă în (5.10) vom înlocui $x - x_0$ cu Δx și vom trece $f(x_0)$ în membrul stâng, vom obține formula

$$\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o((\Delta x)^n).$$

Dacă $0 \in I$ atunci putem lua $x_0 = 0$ și din (5.9) și (5.10) obținem formulele lui Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

5.3.5 Formula lui Taylor pentru unele funcții elementare

Exemplul 1. Să dezvoltăm în serie Mac-Laurent funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n+1)}(x) = e^x; \quad f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

Deci funcția e^x are dezvoltarea Mac-Laurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

unde $\xi = \theta x$, $\theta \in (0, 1)$.

Exemplul 2. Să dezvoltăm în serie Mac-Laurent funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \dots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f(0) = f''(0) = \dots = f^{(2k)}(0) = 0, \quad f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}.$$

Deci funcția $\sin x$ are dezvoltarea Mac-Laurin

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \xi,$$

unde $\xi = \theta x$, $\theta \in (0, 1)$.

Exemplul 3. Funcția $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ are dezvoltarea Mac-Laurent

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x), \quad \theta \in (0, 1).$$

Exemplul 4. Funcția $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$ are dezvoltarea Mac-Laurent

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Exemplul 5. Funcția $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, are dezvoltarea Mac-Laurent

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

5.4 Rolul derivatei de ordinul I la studiul funcțiilor

5.4.1 Condiția suficientă de creștere (descreștere) a unei funcții

Teorema 5.9. *Dacă funcția f este continuă pe segmentul $[a, b]$ și diferențiable pe intervalul (a, b) , atunci pentru ca funcția f să fie strict crescătoare (corespunzător, strict descrescătoare) pe intervalul (a, b) este suficient ca*

$$f'(x) > 0 \quad (\text{corespunzător } f'(x) < 0), \text{ pentru toți } x \in (a, b).$$

Demonstrație. Fie că $f'(x) > 0$, pentru toți $x \in (a, b)$. Să fixăm în mod arbitrar două puncte $a < x_1 < x_2 < b$. Atunci pe segmentul $[x_1, x_2]$ funcția f satisface condițiile teoremei Lagrange. Prin urmare, pe intervalul (x_1, x_2) există un punct ξ așa încât

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Deoarece $x_2 - x_1 > 0$, iar conform ipotezei și $f'(\xi) > 0$, avem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, adică

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Astfel, pentru orice puncte $x_1 < x_2$ din intervalul (a, b) avem $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcția f este strict crescătoare pe intervalul (a, b) .

□

Remarca 1. Condiția $f'(x) > 0$ (corespunzător $f'(x) < 0$) nu este necesară pentru creșterea (corespunzător, descreșterea) funcției $f(x)$ pe intervalul dat.

De exemplu, funcția $f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe tot intervalul $(-\infty, +\infty)$, deși derivata ei $f'(x) = 3x^2$ se anulează în punctul $x = 0$.

Remarca 2. Dacă o funcție f este continuă pe intervalul (a, b) și are derivata pozitivă (corespunzător negativă) pe acest interval, cu excepția unui număr finit de puncte în care derivata se anulează sau nu există, atunci funcția f este strict crescătoare (corespunzător, strict descreșcătoare) pe intervalul (a, b) . Această afirmație reiese nemijlocit din teorema de mai sus, aplicată pe fiecare interval component în care derivata funcției își păstrează semnul.

Exemplu.

Aflați intervalele de monotonie ale funcției $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

Observăm că funcția f este definită pe \mathbb{R} . Aflăm derivata

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2.$$

Determinăm punctele în care derivata se anulează, rezolvând ecuația $f'(x) = 0$.

$$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1)(x - 3) = 0.$$

Deci $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Aceste puncte împart axa reală în 4 intervale. Pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ și $(3, +\infty)$ derivata f' este pozitivă, iar pe intervalul $(1, 3)$ derivata f' este negativă. Deci funcția este crescătoare pe mulțimile $(-\infty, 1]$ și $[3, +\infty)$, și descreșcătoare pe $[1, 3]$.

5.4.2 Puncte de extrem, extremele funcției. Condiția necesară de existență a extremului unei funcții. Puncte staționare. Puncte critice

Să reactualizăm unele noțiuni. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Definiția 5.3. Punctul $x_0 \in I$ se numește *punct de extrem local* sau *relativ* al funcției f dacă există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât diferența $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I \cap U$. Dacă:

$f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numește *punct de maxim local*,

$f(x) - f(x_0) \geq 0, \forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numește *punct de minim local*.

Dacă diferența $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I$, atunci x_0 se numește *punct de extrem absolut* sau *global*.

Valoarea funcției f într-un punct de extrem al său se numește *extremul* funcției.

Remarcă. Orice punct de extrem absolut este punct de extrem relativ. Reciproca nu este adevărată.

Condiția necesară de existență a punctului de extrem al unei funcții este dată de teorema lui Fermat.

Teorema 5.10 (Teorema lui Fermat). Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ și x_0 un punct de extrem al funcției f , interior lui I . Dacă funcția f este derivabilă în punctul x_0 , atunci $f'(x_0) = 0$.

Remarca 1. Egalitatea cu zero a derivatei funcției în punctul x_0 este numai o condiție necesară de existență a extremului, nu și suficientă. Așa, de exemplu, funcția $f(x) = x^3$ are derivata egală cu zero în punctul $x_0 = 0$, dar în acest punct funcția nu are extrem.

Definiția 5.4. Un punct $x_0 \in I$ se numește *punct staționar* al funcției $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dacă f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = 0$.

Remarca 2. O funcție poate avea extrem și în acele puncte în care derivata ei nu există sau este infinită, în condiția că funcția este continuă în aceste puncte.

Exemplu.

Funcția $f(x) = |x|$ este continuă pe \mathbb{R} . În punctul $x_0 = 0$ ea are un minim global, $f(0) = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct ($f'(0-0) = -1$, $f'(0+0) = 1$).

Funcția $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ este definită pe \mathbb{R} și are în punctul $x_0 = 0$ un minim global, $f(0) = 0$. În acest punct funcția f nu este derivabilă, dar

$$f'(0-0) = -\infty, \quad f'(0+0) = +\infty.$$

Definiția 5.5. Punctele în care derivata funcției f este egală cu zero, nu există sau este infinită se numesc *puncte critice* ale funcției f .

Exemplu. Aflați punctele critice ale funcției $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $D_f = [-1, 1]$.

Aflăm derivata funcției

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Domeniul de definiție al derivatei $D_{f'}$ = $(-1, 1)$. Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ aflăm punctele staționare

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Derivatele laterale în punctele $x_3 = -1$ și $x_4 = 1$ sunt infinite, dar funcția este definită în aceste puncte. Deci funcția dată are patru puncte critice

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

5.4.3 Condițiile suficiente de existență a extremului local al unei funcții

Vom conveni să spunem că funcția $f(x)$ își schimbă semnul din minus în plus la trecerea prin punctul x_0 , dacă $f(x) < 0$ în punctele $x < x_0$ suficient de apropiate de x_0 și $f(x) > 0$ în punctele $x > x_0$ suficient de apropiate de x_0 .

Vom conveni să spunem că funcția $f(x)$ își schimbă semnul din plus în minus la trecerea prin punctul x_0 , dacă $f(x) > 0$ în punctele $x < x_0$ suficient de apropiate de x_0 și $f(x) < 0$ în punctele $x > x_0$ suficient de apropiate de x_0 .

Teorema 5.11 (Condițiile suficiente de existență a punctului de extrem local). Fie funcția $f(x)$ este continuă într-o vecinătate $U(x_0)$ a punctului critic x_0 și este diferențiabilă peste tot în această vecinătate cu excepția posibilă a punctului x_0 . Dacă derivata ei $f'(x)$ la trecerea prin punctul x_0 își schimbă semnul

- i) din plus în minus, atunci x_0 este un punct de maxim pentru f ;
- ii) din minus în plus, atunci x_0 este un punct de minim pentru f .

Demonstrație. Fie că la trecerea prin punctul x_0 derivata $f'(x)$ își schimbă semnul din plus în minus. Fixăm în mod arbitrar un punct $x \in U(x_0)$. Aplicând teorema lui Lagrange, găsim un punct ξ care se află între punctele x_0 și x astfel încât

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Dacă $x < x_0$, atunci conform ipotezei $f'(\xi) > 0$ și deci

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Dacă $x > x_0$, atunci conform ipotezei $f'(\xi) < 0$ și deci

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Prin urmare, peste tot în vecinătatea considerată a punctului x_0 avem

$$f(x) < f(x_0),$$

ceea ce înseamnă că punctul x_0 este un punct de maxim strict pentru $f(x)$.

Analogic se examinează și celălalt caz.

□

Exemplu. Aflați extremele funcției $f(x) = (1 - x^3)^2$.

Funcția dată este definită pe \mathbb{R} . Aflăm derivata

$$f'(x) = 2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) = -6x^2(1 - x^3).$$

Deci $D_{f'} = \mathbb{R}$. Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ și aflăm punctele staționare $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

La trecerea prin punctul x_1 derivata f' nu-și schimbă semnul, deci $x_1 = 0$ nu este punct de extrem pentru f .

La trecerea prin punctul x_2 derivata f' își schimbă semnul din minus în plus, deci $x_2 = 1$ este punct de minim pentru f și $f_{\min} = f(1) = 0$.

5.4.4 Condițiile suficiente de existență a extremului local al unei funcții exprimate prin derivate de ordin superior

Teorema 5.12. Fie că funcția $f(x)$ este de clasă C^n într-o vecinătate a punctului x_0 . Fie că

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{iar} \quad f^{(n)} \neq 0,$$

atunci, dacă:

- i) n este număr par, atunci x_0 este punct de extrem pentru funcția $f(x)$ și anume:
 - punct de maxim, dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$,
 - punct de minim, dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$,
- ii) n este număr impar, atunci x_0 nu este punct de extrem pentru funcția $f(x)$.

Demonstrație. Să dezvoltăm funcția $f(x)$ după formula lui Taylor în punctul x_0 ,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

unde ξ este un punct situat între x și x_0 .

Ținând cont de ipoteza teoremei, avem

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Deoarece funcția $f^{(n)}(x)$ este continuă în punctul x_0 , există o vecinătate $U(x_0)$ a acestui punct în care derivata $f^{(n)}(x)$ păstrează semnul constant, care coincide cu semnul valorii $f^{(n)}(x_0)$. Dacă vom considera $x \in U(x_0)$, atunci semnul valorii $f^{(n)}(\xi)$ coincide cu semnul lui $f^{(n)}(x_0)$.

Fie n este un număr par. Atunci pentru toți $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$, avem $(x-x_0)^n > 0$. Prin urmare diferența $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant în această vecinătate găurită și deci x_0 este un punct de extrem pentru funcția $f(x)$. În plus,

– dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci $f^{(n)}(\xi) > 0$, și deci $f(x) - f(x_0) > 0$, ceea ce înseamnă că x_0 este un punct de minim pentru $f(x)$;

– dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci $f^{(n)}(\xi) < 0$, și deci $f(x) - f(x_0) < 0$, ceea ce înseamnă că x_0 este un punct de maxim pentru $f(x)$;

Fie n este un număr impar. Atunci în vecinătatea $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, expresia $(x-x_0)^n$ nu păstrează semnul constant (pentru $x < x_0$, avem $(x-x_0)^n < 0$, iar pentru $x > x_0$, avem $(x-x_0)^n > 0$), de aceea nici diferența $f(x) - f(x_0)$ nu păstrează semnul constant pe această mulțime. Dar atunci, x_0 nu este punct de extrem pentru funcția $f(x)$. □

Consecință. În particular, dacă o funcție $f(x)$ este continuu-diferențiable de două ori într-o vecinătate a punctului x_0 și dacă

$$f'(x_0) = 0, \quad \text{iar} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

atunci x_0 este punct de maxim, dacă $f''(x_0) < 0$ și este punct de minim, dacă $f''(x_0) > 0$.

Exemplu. Aflați extremele funcției $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Avem $D_f = \mathbb{R}$. Aflăm

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

Punctele staționare sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Aflăm derivata de ordinul doi $f''(x) = 6x - 6$. Deoarece

$$f''(-1) = -12 < 0, \quad \text{avem } x_1 = -1 \quad \text{este punct de maxim, } f_{\max} = f(-1) = 7;$$

$$f''(3) = 12 > 0, \quad \text{avem } x_2 = 3 \quad \text{este punct de minim, } f_{\min} = f(3) = -25.$$

5.4.5 Aflarea valorii celei mai mari și valorii celei mai mici ale unei funcții pe un segment

În practică adeseori se întâlnesc probleme în care se cere de aflat valoarea cea mai mare sau valoarea cea mai mică a unei funcții $f(x)$ pe un segment închis $[a, b]$. Pentru aceasta, în cazul când funcția f este diferențiabilă, vom aplica următorul algoritm:

- 1) Calculăm derivata $f'(x)$ a funcției date.
- 2) Aflăm punctele staționare, rezolvând ecuația $f'(x) = 0$.
- 3) Calculăm valorile funcției f în punctele staționare care se conțin în acest segment.
- 4) Calculăm valorile funcției f la capetele segmentului.
- 5) Comparăm valorile găsite și aflăm cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției pe segmentul dat.

Exemplu. Să se afle un număr, care fiind adunat cu pătratul său dă în rezultat suma minimă.

Soluție. Fie, x numărul căutat. Atunci suma dintre acest număr și pătratul lui este

$$S(x) = x + x^2.$$

Aflăm derivata $S'(x) = 1 + 2x$ și din ecuația $S'(x) = 0$ găsim punctul staționar $x = -\frac{1}{2}$. Deoarece $S''(x) = 2 > 0$ deducem că $x = -\frac{1}{2}$ este un punct de minim pentru funcția $S(x)$. Deci, numărul căutat este $x = -\frac{1}{2}$.

5.5 Rolul derivatei de ordinul II în studiul funcțiilor de o variabilă reală

5.5.1 Convexitatea și concavitata graficului unei funcții. Puncte de inflexiune

Fie că funcția f este definită pe intervalul (a, b) și fie $a < x_1 < x_2 < b$. Prin punctele $A(x_1, f(x_1))$ și $B(x_2, f(x_2))$ de pe graficul funcției f ducem o dreaptă l . Ecuația acestei drepte este

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

sau de aici

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Notăm cu $l(x)$ expresia din membrul drept, atunci ecuația acestei drepte se înscrie în forma $y = l(x)$. Evident că $l(x_1) = f(x_1)$ și $l(x_2) = f(x_2)$.

Definiția 5.6. Funcția f se numește *convexă* (corespunzător *concavă*) pe intervalul (a, b) , dacă oricare ar fi punctele x_1 și x_2 , $a < x_1 < x_2 < b$, pentru orice punct x_0 de pe intervalul (x_1, x_2) are loc inegalitatea

$$l(x_0) \leq f(x_0), \quad (5.12)$$

(corespunzător

$$l(x_0) \geq f(x_0)). \quad (5.13)$$

Geometric aceasta înseamnă că orice punct de pe coarda AB se află nu mai sus (respectiv nu mai jos) decât punctul de pe graficul funcției f corespunzător aceleași valori a argumentului.

Definiția 5.7. Dacă în loc de inegalitățile (5.12) și (5.13) au loc inegalitățile stricte

$$l(x_0) < f(x_0),$$

corespunzător

$$l(x_0) > f(x_0)$$

pentru orice x_0, x_1 și x_2 astfel încât $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, atunci funcția f se numește *strict convexă* (corespunzător *strict concavă*) pe intervalul (a, b) .

Definiția 5.8. Orice interval pe care o funcție este (strict) convexă, corespunzător (strict) concavă, se numește *interval de convexitate (strictă)*, corespunzător *interval de concavitate (strictă)* pentru această funcție.

Definiția 5.9. Fie funcția f definită într-o vecinătate a punctului x_0 și continuă în acest punct. Punctul x_0 se numește *punct de inflexiune* pentru funcția f , dacă ea este în același timp capătul intervalului de convexitate strictă și capătul intervalului de concavitate strictă.

În acest caz, punctul $(x_0, f(x_0))$ se numește *punct de inflexiune pentru graficul funcției*.

5.5.2 Condiția suficientă de convexitate (concavitate) strictă a unei funcții

Teorema 5.13. Fie f o funcție definită și diferențiabilă de 2 ori pe intervalul (a, b) . Dacă $f'' < 0$ pe (a, b) , atunci funcția f este strict convexă, iar dacă $f''(x) > 0$ pe (a, b) , atunci funcția f este strict concavă pe acest interval.

Demonstrație. Fie $a < x_1 < x < x_2 < b$. Atunci

$$l(x) - f(x) = \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

La diferența $f(x_2) - f(x)$ aplicăm teorema lui Lagrange, conform căreia există un punct η situat între x și x_2 astfel încât

$$f(x_2) - f(x) = f'(\eta)(x_2 - x).$$

La diferența $f(x) - f(x_1)$ de asemenea aplicăm teorema lui Lagrange, conform căreia există un punct ξ între x_1 și x astfel încât

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1).$$

Deci

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

unde $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

La diferența $f'(\eta) - f'(\xi)$ de asemenea aplicăm teorema lui Lagrange, conform căreia există un punct $\zeta \in (\xi, \eta)$ astfel încât

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

De aici observăm că dacă $f'' < 0$ pe (a, b) , atunci în particular $f''(\zeta) < 0$ și de aceea $l(x) < f(x)$. Prin urmare, funcția f este strict convexă.

Dacă însă, $f'' > 0$ pe (a, b) , atunci $l(x) > f(x)$, iar funcția $f(x)$ este strict concavă pe intervalul dat.

□

Exemplu. Fie $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f''(x) = 6x$, deducem că pentru $x > 0$, avem $f'' > 0$, iar pentru $x < 0$, avem $f'' < 0$. Deci pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcția dată este strict convexă, iar pe intervalul $(0, +\infty)$ ea este strict concavă. Punctul $x = 0$ este în același timp capătul intervalului de convexitate și al intervalului de concavitate, deci acesta este un punct de inflexiune.

Remarcă. Condiția de păstrare a semnului derivatei de ordinul 2 fiind suficientă pentru convexitatea (sau concavitatea) strictă a funcției f nu este și suficientă. Așa, de exemplu, funcția $f(x) = x^4$ este strict concavă pe toată axa, însă derivata ei de ordinul doi $f''(x) = 12x^2$ se anulează în punctul $x = 0$.

5.5.3 Condiția necesară de existență a punctului de inflexiune

Teorema 5.14 (Condiția necesară de existență a punctului de inflexiune). Fie f o funcție definită și continuu diferențiabilă de două ori pe intervalul (a, b) . Dacă punctul $x_0 \in (a, b)$ este punct de inflexiune pentru f , atunci $f''(x_0) = 0$.

Demonstrație. Dacă ar fi fost $f''(x_0) < 0$, atunci din continuitatea derivatei de ordinul doi, rezultă că se va putea găsi o vecinătate a punctului x_0 în care $f''(x) < 0$ și conform Teoremei 5.13 funcția f ar fi fost strict convexă pe acest interval care conține în interiorul său punctul x_0 , ceea ce contrazice faptul că x_0 este un punct de inflexiune pentru f . \square

Remarcă. Punctele de inflexiune ale unei funcții continuu diferențiabile de două ori cu excepția posibilă a unui număr finit de puncte, trebuie căutate printre punctele în care derivata de ordinul doi este egală cu zero sau nu există.

5.5.4 Condițiile suficiente de existență a punctului de inflexiune

Teorema 5.15. Fie f o funcție continuă pe intervalul (a, b) și derivabilă de două ori pe acest interval, cu excepția posibilă a punctului $x_0 \in (a, b)$. Dacă la trecerea argumentului prin punctul x_0 derivata de ordinul doi își schimbă semnul, atunci x_0 este un punct de inflexiune pentru f .

Exemplu. Fie $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f''(x) = 6x$ și $f'' < 0$, dacă $x < 0$ și $f'' > 0$, dacă $x > 0$ deducem că $x_0 = 0$ este punct de inflexiune.

Teorema 5.16. Dacă o funcție f este diferențiabilă de două ori pe intervalul (a, b) și derivata de ordinul doi păstrează semnul constant pe (a, b) (prin urmare, intervalul (a, b) este interval de convexitate sau concavitate strictă pentru funcția f), atunci oricare ar fi punctul $x_0 \in (a, b)$ toate punctele graficului funcției f pe acest interval se află ori deasupra ori sub tangenta dusă la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ cu excepția acestui punct care se află pe graficul funcției.

Teorema 5.17. Fie $f''(x_0) = 0$ și $f'''(x_0) \neq 0$, atunci x_0 este un punct de inflexiune pentru f . Dacă $y = L(x)$ este ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $(x_0, f(x_0))$, atunci la trecerea argumentului prin punctul x_0 diferența $f(x) - L(x)$ își schimbă semnul.

5.5.5 Asimptotele graficului unei funcții

Definiția 5.10. Fie f o funcție definită pentru $x > a$ (sau pentru $x < a$). Vom numi *asimptotă a funcției f* o așa dreaptă pentru care distanța de la un punct de pe graficul funcției f până la această dreaptă tinde la zero, atunci când punctul se îndepărtează nelimitat de-a lungul curbei $y = f(x)$ de la originea coordonatelor.

Existența asimptotei unei funcții înseamnă că atunci când argumentul $x \rightarrow +\infty$ (sau $x \rightarrow -\infty$) funcția se comportă aproape la fel ca o funcție liniară, adică se deosebește de o funcție liniară infinit de puțin.

Cu alte cuvinte, dreapta $y = kx + b$ este *asimptotă oblică* pentru funcția $f(x)$ când $x \rightarrow \pm\infty$ dacă funcția $f(x)$ poate fi prezentată în forma

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

unde $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = 0$.

De aici aflăm

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} k + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{x} = k.$$

Ac sãdar,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

iar

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Dacã $k = 0$, atunci asimptota se numește *orizantală*.

Definiția 5.11. Dreapta $x = x_0$ se numește *asimptotă verticală* a funcției $f(x)$ dacã

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Exemplu. Aflați asimptotele funcției $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} = \infty$$

deducem cã $x = -1$ este asimptotă verticală pentru funcția datã.

Sã determinãm dacã funcția are asimptotă oblicã sau orizantală. Pentru aceasta calculãm limitele

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x + 1)} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x \right) = -4.$$

Deci $y = x - 4$ este asimptotă oblicã a funcției date.

5.5.6 Planul studierii funcțiilor. Construcția graficului funcției

1. Aflați domeniul de definiție al funcției.
2. Studiați funcția la continuitate.
3. Studiați funcția la paritate/imparitate și periodicitate.
4. Dacã este posibil, aflați zerourile funcției.
5. Aflați asimptotele graficului funcției și limitele funcției la capetele domeniului de definiție.
6. Aflați derivata funcției și domeniul de definiție al derivatei.
7. Aflați punctele critice în raport cu derivata de ordinul I.

8. Aflați intervalele de monotonie ale funcției.
9. Aflați extremele funcției.
10. Aflați derivata de ordinul doi și domeniul ei de definiție.
11. Aflați punctele critice în raport cu derivata de ordinul doi.
12. Aflați intervalele de convexitate și concavitate.
13. Aflați punctele de inflexiune.
14. Sistematizați datele în tabelul de variație al funcției.
15. Schițați graficul funcției.

Exerciții. Studiați și schițați graficele funcțiilor date:

1. $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$;

2. $f(x) = -x^3 + 4x - 3$;

3. $f(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2$;

4. $f(x) = \frac{4 + x - 2x^2}{(x - 2)^2}$.

Bibliografie

1. Bivol, L., Bulat, M., *Lecții la analiza matematică*, v. 1, Chișinău: EVRICA, 2002, 238 pag.
2. Precupanu, A., *Bazele analizei matematice*, Ed. Universității „Al. I. Cuza”, Iași, 1993, 475 pag.
3. Зорич, В. А., *Математический анализ*, ч. 1, Москва: ФАЗИС, 1997, 554 стр.
4. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. Основы математического анализа; т. 1, Москва: Наука, 1980.
5. Кудрявцев, Л. Д., *Математический анализ*, т. 1, Москва: Высшая школа, 1970, 588 стр.
6. Финтегольц, Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 680 стр.
7. Штернтал, А. Ф., *Ынтродучере ын студиял анализей математиче*, Кишинэу: Лумина, 1966.