

Ministerul Educației al Republicii Moldova  
Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți  
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului  
Catedra de Matematică și Informatică

Curriculum pentru unitatea de curs

## Analiza matematică III

Studii cu frecvență la zi

Bălți, 2014

Curriculum-ul la unitatea de curs *Analiza matematică III* a fost discutat la ședința Catedrei de Matematică și Informatică, Procesul-verbal nr. 12 din 30.05.14

Șeful Catedrei \_\_\_\_\_ conf. univ., dr., Eugeniu Plohotniuc

Curriculum-ul la unitatea de curs *Analiza matematică III* a fost aprobat la ședința Consiliului Facultății de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Procesul-verbal nr. 9 din 19.06.14

Decanul Facultății \_\_\_\_\_ prof. univ., dr. hab., Pavel Topală

## Informații de identificare a cursului

**Facultatea:** Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului

**Catedra:** Matematică și Informatică

**Domeniul general de studiu:** 14 Științe ale Educației

**Domeniul de formare profesională:** 141 Educație și formarea profesorilor

**Denumirea specializării:** 141.01 Matematică și 141.02 Informatică, ciclul I, studii superioare de licență

**Denumirea disciplinei:** *Analiza matematică III*

**Administrarea unității de curs:**

Codul unității de curs	Credite ECTS	Total ore	Repartizarea orelor				Forma de evaluare	Limba de predare
			Prel.	Sem.	Lab.	S. ind.		
S1.03.O.023	6	180	60	45	–	75	Examen	română/ rusă/ engleză

**Anul de studiu și semestrul în care se studiază disciplina:** anul II, semestrul III

**Regimul disciplinei (obligatorie/opțională/la liberă alegere):** obligatorie

**Categoria formativă:** unitate de curs de orientare spre specializarea de bază (matematica).

## Informații referitoare la cadrul didactic

Titularul cursului – Natalia Gașițoi, dr. în matematică, lector superior la catedra de matematică și informatică, a absolvit Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți, specializarea „Matematică și Informatică.” A susținut teza de doctor la Institutul de Matematică „Simion Stoilow” al Academiei Române.

*Biroul:* aula 208.

*Telefon:* 0 231 52 337

*E-mail:* natalia.gasitoi@gmail.com

*Orele de consultații:* joi, 14<sup>10</sup> – 15<sup>30</sup>. Consultațiile se oferă atât în regim „față - în - față”, cât și prin utilizarea poștei electronice sau Skype. Numele în Skype: n.gasitoi



## Integrarea cursului în programul de studiu

Cursul de Analiză Matematică III se predă în semestrul III și este o unitate de curs orientată spre specializarea de bază destinată studenților specializării „Matematică și Informatică”. Studiul elementelor de analiză matematică reprezintă o continuare a cursurilor fundamentale F.01.O.001 Analiza matematică I și F.02.O.012 Analiza matematică II. Acest curs servește drept fundament și pentru unitățile de curs: S1.04.O.033 Ecuații diferențiale, S1.04.O.034 Analiza complexă, S1.06.O.056 Geometria diferențială și topologia, S1.06.A.059 Aplicații ale calculului diferențial, S1.06.A.060 Aplicații ale calculului integral, M.07.A.068 Teoria măsurii și integrala Lebesgue, M.07.A.069 Elemente de analiză funcțională, M.07.A.072 Ecuații cu derivate parțiale, M.07.A.071 Ecuațiile fizicii matematice.

Tematica acestei unități de curs: funcții de mai multe variabile reale, calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile reale, integrale multiple Riemann, integrale curbilinii, integrale de suprafață, este inclusă în toate programele de studii cu specializare matematică.

Reieșind din interesele viitorului profesor de matematică considerăm că problemele fundamentale abordate în cadrul acestui curs constituie un element absolut necesar al culturii matematice, o parte indispensabilă a pregătirii profesorilor de matematică.

### Competențe prealabile

#### i) *Competențe cognitive:*

- de explicare a conceptelor de bază ale cursurilor F.01.O.001 Analiza matematică I și F.02.O.012 Analiza matematică II: noțiune de limită a unui șir numeric, serie numerică, noțiune de limită a unei funcții într-un punct, noțiune de funcție continuă, derivata funcției, diferențiala funcției, noțiune de primitivă, integrală definită, serie funcțională;
- de descriere a proprietăților funcțiilor continue, ale funcțiilor derivabile și ale funcțiilor integrabile de o variabilă reală;
- de descriere a metodelor de aplicare ale calculului diferențial și cel integral al funcțiilor de o variabilă reală în studiul funcțiilor și în contextul anumitor probleme aplicative;
- de descriere a curbelor și suprafețelor de ordinul II.

#### ii) *Competențe de aplicare:*

- de studiere la convergență a șirurilor și seriilor numerice;
- de studiere la continuitate a funcțiilor de o variabilă reală;
- de calcul al derivatelor funcțiilor reale de o variabilă reală;
- de calcul al integralelor nedefinite;

- de calcul al integralelor definite și de aplicare a calculului integral la rezolvarea unor probleme de geometrie și mecanică;
- de aplicare a teoremelor de bază ale calculului diferențial și ale calculului integral al funcțiilor de o variabilă reală la studiul funcțiilor și rezolvarea problemelor.

## **Competențe dezvoltate în cadrul cursului**

### **i) Competențe cognitive:**

- explicare, exemplificare și operare cu conceptele de bază ale teoriei funcțiilor de mai multe variabile reale;
- de descriere a proprietăților funcțiilor continue de mai multe variabile pe mulțimi compacte; a metodelor de calcul al integralelor multiple, curbilinii și de suprafață;
- de dezvoltare a proprietăților integralelor multiple, curbilinii și de suprafață;
- de cunoaștere și descriere a problemelor care pot fi rezolvate aplicând calculul diferențial și integral al funcțiilor de mai multe variabile reale.

### **ii) Competențe de aplicare:**

- de aplicare a calculului diferențial al funcțiilor de mai multe variabile reale la rezolvarea unor probleme de extrem;
- de aplicare a calculului integral al funcțiilor de mai multe variabile reale la rezolvarea unor probleme de geometrie și mecanică;
- de argumentare a metodelor de rezolvare a problemelor din diferite compartimente ale disciplinei;
- de transfer al cunoștințelor teoretice dobândite în cadrul studierii cursului în diverse domenii ale activității profesionale.

### **iii) Competențe de analiză și predicție:**

- de descriere a etapelor de introducere ale conceptelor de derivată parțială, integrală dublă, integrală triplă, integrală curbilinie de speța I și II, integrală de suprafață de speța I și II;
- de modelare a unor procese reale, de formulare a ipotezelor, de determinare a traseului de rezolvare a problemelor corespunzătoare;
- de determinare a traseului de rezolvare și de formulare a concluziilor referitoare la problemele ce pot fi soluționate aplicând cunoștințele și deprinderile formate în cadrul cursului.

### **iv) Competențe de comunicare:**

- de explicare în limba maternă într-o manieră clară și precisă, oral și în scris, a conținuturilor teoretice de bază ale Analizei matematice III;
- de descriere a tehnicilor specifice disciplinei.

v) *Competențe de învățare:*

- de formulare a obiectivelor cognitive și de alegere a căilor de atingere a lor, aplicând diverse operații mintale așa ca observația, comparația, generalizarea, analiza și sinteza, inducția și deducția, analogia, modelarea etc.

## Finalitățile disciplinei

La finalizarea studierii disciplinei studentul va fi capabil:

1. Să explice conținuturile teoretice, metodele și tehnicile de bază ale unității de curs Analiza matematică III.
2. Să studieze la limită și continuitate funcții de mai multe variabile reale.
3. Să studieze la extrem funcții de mai multe variabile reale.
4. Să aplice integralele duble și triple la rezolvarea unor probleme de geometrie și fizică.
5. Să aplice integralele curbilinii și de suprafață la soluționarea unor probleme de geometrie și fizică.
6. Să propună procedee, metode, tehnici aplicate în Analiza matematică III pentru rezolvarea adecvată a unor probleme din alte domenii.

## Conținuturi

Unitatea de curs „Analiza matematică III” este divizată în 6 unități de învățare.

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
	<b>Unitatea de învățare I. Spațiul euclidian <math>n</math>-dimensional. Funcții de mai multe variabile</b>			
1.	Spațiul euclidian $n$ -dimensional $\mathbb{R}^n$ .	2		1
2.	Șiruri de vectori în $\mathbb{R}^n$ . Convergența în $\mathbb{R}^n$ .	2	1	1
3.	Funcții de mai multe variabile reale. Limita funcției.	2	2	2
4.	Funcții continue de mai multe variabile reale. Proprietățile funcțiilor de mai multe variabile continue pe mulțimi compacte.	2	1	2
	<i>Testul de evaluare nr. 1.</i>	2		4

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
	<b>Unitatea de învățare II. Calculul diferențial al funcțiilor de mai multe variabile reale</b>			
5.	Derivate parțiale ale funcțiilor de mai multe variabile reale. Funcții diferențiabile.	4	3	2
6.	Derivarea funcțiilor compuse de mai multe variabile.	2	2	2
7.	Derivate parțiale și diferențiale parțiale de ordin superior ale unei funcții de mai multe variabile reale.	2	2	2
8.	Funcții implicite de mai multe variabile reale.	2	1	2
9.	Formula lui Taylor pentru o funcție de mai multe variabile reale.	2	2	2
10.	Studiul la extrem al funcțiilor de mai multe variabile reale.	3	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 2.</i>	2		4
	<b>Unitatea de învățare III. Integrale duble</b>			
11.	Integrala dublă. Condițiile de existență a integralei duble. Proprietățile de bază ale integralei duble.	3		2
12.	Calculul integralelor duble.	2	2	2
13.	Schimbarea de variabile în integrala dublă.	2	2	2
14.	Unele aplicații ale integralelor duble în geometrie și mecanică.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 3.</i>	2		4
	<b>Unitatea de învățare IV. Integrale triple</b>			
15.	Noțiune de integrală triplă. Condițiile de existență. Proprietățile de bază.	2		2
16.	Calculul integralelor triple. Schimbarea de variabile în integrala triplă.	2	3	2
17.	Unele aplicații ale integralelor triple în geometrie și fizică.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 4.</i>		2	4
	<b>Unitatea de învățare V. Integrale curbilinii</b>			
18.	Integrala curbilinie de speța I.	2	2	2
19.	Integrala curbilinie de speța a II-a.	2	2	2
20.	Formula lui Green. Aplicații ale formulei lui Green.	2	2	2
21.	Condițiile de independență ale integralei curbilinii de speța a II-a de drumul de integrare.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 5.</i>		2	4

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
	<b>Unitatea de învățare VI. Integrale de suprafață</b>			
22.	Integrale de suprafață de speța I.	2	2	2
23.	Integrale de suprafață de speța a II-a.	2	2	2
24.	Formula lui Stokes și formula Ostrogradschi-Gauss.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 6.</i>	2		4
	<i>Testul de evaluare finală</i>			5
	<b>TOTAL</b>	<b>60</b>	<b>45</b>	<b>75</b>

## Activități de lucru individual

Activitatea individuală este o componentă obligatorie a activității de instruire. În cadrul studierii acestui curs, studenților li se vor propune o serie de teme și probleme care urmează a fi studiate și soluționate independent. Însărcinările pentru lucrul individual sunt lansate în cadrul prelegerilor.

Studentul trebuie să rezolve într-un caiet problemele propuse. Rezolvările trebuie să fie detaliate, însoțite de explicațiile de rigoare. Este binevenită rezolvarea exemplilor și din alte surse, selectate de student. Se va aprecia utilizarea resurselor scrise în limbi străine.

Se recomandă de a prezenta regulat pe parcursul semestrului caietul pentru verificare. Nota pentru lucrul efectuat se va da la sfârșitul semestrului.

## Evaluare

Cunoștințele, capacitățile și competențele studenților vor fi evaluate pe parcursul semestrului. Sunt planificate 6 teste de evaluare curentă. În cazul în care studentul lipsește motivat la una din testări, după reîncadrarea lui în procesul de studii, timp de o săptămână, urmează a fi programată și ulterior realizată testarea suplimentară.

Evaluarea finală are loc sub forma unui examen scris. Durata examenului este de 2 ore și 15 minute.

Nota finală la unitatea de curs „Analiza matematică III” se calculează conform formulei:

$$N_f = 0.6 \times n_m + 0.4 \times n_e,$$

unde  $N_f$  este nota finală,  $n_m$  este nota medie, calculată cu precizia de până la sutimi și reprezintă media aritmetică a notelor pentru testele curente și pentru sarcinile de lucru independent,  $n_e$  nota de la examen.



## Model de test de evaluare finală

### Partea I.

I. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor, indicând în carou litera A, dacă afirmația este adevărată sau litera F, dacă afirmația este falsă:

1. Convergența punctuală a unei serii funcționale implică convergența uniformă a seriei.
2. Suma unei serii de funcții continue pe un segment  $[a, b]$  uniform convergentă pe  $[a, b]$  este funcție continuă pe  $[a, b]$ .
3. Suma unei serii de funcții continue diferențiabile pe un segment  $[a, b]$  uniform convergentă pe  $[a, b]$  este funcție continuu diferențiabilă pe  $[a, b]$ .
4. Orice punct frontieră al unei mulțimi nevide din  $\mathbb{R}^n$  este punct de acumulare pentru această mulțime.
5. O mulțime dintr-un spațiu euclidian  $n$ -dimensional este închisă dacă ea conține toate punctele frontieră ale ei.
6. Orice șir mărginit de vectori din  $\mathbb{R}^n$  este convergent.
7. Existența și egalitatea limitelor repetate ale unei funcții de mai multe variabile implică existența limitei funcției în acest punct.
8. Clasele de funcții de două variabile derivabile parțial într-un punct și de funcții de două variabile diferențiabile în același punct coincid.
9. Derivatele parțiale mixte de ordin superior ale unei funcții de mai multe variabile nu depind de ordinea derivării, dar depind numai de câte ori se derivează funcția în raport cu fiecare variabilă.
10. Orice funcție  $f(x, y)$  mărginită pe un domeniu plan mărginit și închis este integrabilă pe el în sensul lui Riemann.
11. Orice funcție  $f(x, y)$  integrabilă în sensul lui Riemann pe un domeniu plan mărginit și închis este mărginită pe el.
12. Integrala curbilinie de speța întâi nu depinde de orientarea drumului de integrare.

### Partea II

II. Continuați propozițiile:

1. Dacă o serie funcțională  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este majorată pe segmentul  $[a, b]$  de o serie numerică pozitivă convergentă  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , atunci . . . .
2. Dacă o serie de puteri  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  este convergentă într-un punct  $x_0 \neq 0$ , atunci seria este absolut convergentă în toate punctele  $x$  care satisfac condiția . . . .
3. Dacă o serie de puteri  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  este divergentă într-un punct  $x_0 \neq 0$ , atunci seria este divergentă în toate punctele  $x$  care satisfac condiția . . . .
4. Pentru convergența șirului de vectori  $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $m = 1, 2, \dots$  la vectorul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  este necesar și suficient . . . .
5. Șirul  $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$  se numește Cauchy dacă . . . .
6. Orice funcție de  $n$  variabile continuă pe un compact  $A \subset \mathbb{R}^n$  posedă următoarele proprietăți: 1. . . . .
7. Dacă o funcție  $f(x, y)$  este diferențiabilă în punctul  $M_0(x_0, y_0)$  și  $df = A\Delta x + B\Delta y$  este diferențiala ei în acest punct, atunci în punctul  $(x_0, y_0)$  funcția  $f$  este derivabilă parțial. Într-adevăr . . . .
8. Condiția necesară de existență a extremului local al unei funcții diferențiabile de mai multe variabile este . . . .
9. Teorema de medie pentru integrala dublă: . . . Demonstrație: . . .
10. Integrala curbilinie de speța întâi a unei funcții  $f(x, y)$  de-a lungul curbei netede  $\gamma$  este . . . .

### Partea III

*III. Încercuiți varianta corectă de răspuns. Toate răspunsurile trebuie însoțite de rezolvări cu explicații complete. Un răspuns corect, care nu este însoțit de argumentările de rigoare nu va fi punctat. Pentru un răspuns greșit pot fi acordate puncte, dacă este aplicată o metodă corectă de rezolvare.*

1. Domeniul de definiție al funcției  $f(x, y) = \ln(3x + y - 3) + \frac{\ln(3 - x)}{\sqrt{3x - 2y + 6}}$  este
  - a. un triunghi cu vârfurile în punctele  $(0, -3)$ ,  $(-3, 15/2)$ ,  $(3, -6)$ .
  - b. un patrulater cu vârfurile în punctele  $(0, 0)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 15/2)$ ,  $(3, -6)$ .
  - c. un triunghi cu vârfurile în punctele  $(0, 3)$ ,  $(3, 15/2)$ ,  $(3, -6)$ .
  - d. un domeniu plan nemărginit.

2. Limita  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{3x^2 + y^4}$   
 a. este egală cu 0      b. este egală cu  $1/3$       c. nu există      d. altă variantă.
3. Funcția  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$  are  
 a. un punct de extrem      b. două puncte de extrem  
 c. trei puncte de extrem      b. patru puncte de extrem.
4. Integrala de la funcția  $f(x, y) = x^2$  pe domeniul care este mărginit de parabola  $y = 2 - x^2$  și dreapta  $y = -4$  este egală cu  
 a.  $\frac{43\sqrt{6}}{5}$       b.  $\frac{48\sqrt{10}}{5}$       c.  $-\frac{43\sqrt{6}}{5}$       d.  $\frac{48\sqrt{6}}{5}$ .
5. Volumul corpului solid mărginit de suprafețele  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$  și  $z = x^2 + y^2 - 2$  este egal cu  
 a.  $\frac{44\sqrt{6}\pi}{3}$       b.  $\frac{43\pi}{6}$       c.  $\frac{44\pi}{3}$       d.  $\frac{49\pi}{3}$ .
6. Calculați integrala curbilinie  $\oint_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ , unde  $\gamma$  este conturul închis alcătuit din arcurile cercurilor  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  și segmentele decupate din axa  $Ox$  de aceste cercuri. Utilizați calculul direct și verificați corectitudinea aplicând formula lui Green.
7. Calculați  $\iint_S (y^2 - x^2) dydz + z^2 \sin x dzdx - 2y^2z dx dy$ , unde  $S$  este partea superioară a suprafeței definită de ecuația  $z = 1 - x^2$ , mărginită de planele  $z = 0$ ,  $y = -1$ ,  $y = 2$ .

## Principii de lucru în cadrul disciplinei

1. Fiecare oră de curs va începe cu un scurt rezumat (în scris timp de 5 minute) al temei studiate la cursul precedent.
2. Este salutată poziția activă a studentului, care studiază independent noi conținuturi ce țin de curs, care propune pentru discuție probleme selectate din literatura de specialitate, formulează întrebări în cadrul orelor de curs și a orelor practice.
3. Nu este salutată întârzierea la ore.
4. În cadrul disciplinei o atenție sporită va fi oferită respectării principiilor etice. Prezentarea unor soluții a sarcinilor, preluate de la colegi sau din alte surse, preluarea informațiilor din diverse surse, fără a face trimitere la sursă, va fi considerată plagiat și va fi sancționată prin note de „1”.

## Resursele informaționale la disciplină

1. Кудрявцев, Л. Д., *Математический анализ*, т. 1, 2, Москва: Высшая школа, 1970.
2. Fihtengolț, G. M., *Curs de calcul diferențial și integral*, v. 1, 2, 3, București: Ed. Tehnică, 1963.
3. Зорич, В. А., *Математический анализ*, ч. 1, 2, Москва: ФАЗИС, 1997.
4. Bivol, L., Bulat, M., *Lecții la analiza matematică*, v. 1, 2, Chișinău: EVRICA, 2002.
5. Штернтал, А. Ф., *Ынтродучере ын студиул анализей математиче*, Кишинэу: Лумина, 1966.
6. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. *Основы математического анализа*; т. 1, 2, Москва: Наука, 1980.
7. Демидович, Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, Москва: Наука, 1979.
8. Берман, Г. Н., *Кулежере де проблеме ла анализа математикэ*, Кишинэу: Лумина, 1968.
9. Давыдов, Н.А., *Сборник задач по математическому анализу*, Москва: Просвещение, 1973.
10. Кузнецов, Л. А., *Сборник заданий по высшей математике*, Москва: Высшая школа, 1994.
11. Запорожец, Г. И., *Руководство к решению задач по математическому анализу*, Москва: Высшая школа, 1966.
12. Trench W. F., *Introduction to real analysis*. Acces liber la adresa web:  
[http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH\\_REAL\\_ANALYSIS.PDF](http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_REAL_ANALYSIS.PDF)
13. Krantz S., *Calculus demystified*, McGRAW-HILL, 2003.