

Ministerul Educației al Republicii Moldova  
Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți  
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului  
Catedra de Matematică și Informatică

Curriculum pentru unitatea de curs

## Analiza matematică II

Studii cu frecvență la zi

Bălți, 2014

Curriculum-ul la unitatea de curs *Analiza matematică II* a fost discutat la ședința Catedrei de Matematică și Informatică, Procesul-verbal nr. 12 din 30.05.14

Șeful Catedrei \_\_\_\_\_ conf. univ., dr., Eugeniu Plohotniuc

Curriculum-ul la unitatea de curs *Analiza matematică II* a fost aprobat la ședința Consiliului Facultății de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Procesul-verbal nr. 9 din 19.06.14

Decanul Facultății \_\_\_\_\_ prof. univ., dr. hab., Pavel Topală

## Informații de identificare a cursului

**Facultatea:** Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului

**Catedra:** Matematică și Informatică

**Domeniul general de studiu:** 14 Științe ale Educației

**Domeniul de formare profesională:** 141 Educație și formarea profesorilor

**Denumirea specializării:** 141.01 Matematică și 141.02 Informatică, ciclul I, studii superioare de licență

**Denumirea disciplinei:** *Analiza matematică II*

**Administrarea unității de curs:**

Codul unității de curs	Credite ECTS	Total ore	Repartizarea orelor				Forma de evaluare	Limba de predare
			Prel.	Sem.	Lab.	S. ind.		
F.02.O.012	6	180	60	45	–	75	Examen	română/ rusă/ engleză

**Anul de studiu și semestrul în care se studiază disciplina:** anul I, semestrul II

**Regimul disciplinei (obligatorie/opțională/la liberă alegere):** obligatorie

**Categoria formativă:** unitate de curs fundamentală.

## Informații referitoare la cadrul didactic

Titularul cursului – Natalia Gașițoi, dr. în matematică, lector superior la catedra de matematică și informatică, a absolvit Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți, specializarea „Matematică și Informatică.” A susținut teza de doctor la Institutul de Matematică „Simion Stoilow” al Academiei Române.

*Biroul:* aula 208.

*Telefon:* 0 231 52 337

*E-mail:* natalia.gasitoi@gmail.com

*Orele de consultații:* joi, 14<sup>10</sup> – 15<sup>30</sup>. Consultațiile se oferă atât în regim „față - în - față”, cât și prin utilizarea poștei electronice sau Skype. Numele în Skype: n.gasitoi



## Integrarea cursului în programul de studiu

Cursul de Analiză Matematică II se predă în semestrul II și este o unitate de curs fundamentală pentru specializarea „Matematică și Informatică”. Studiul elementelor de analiză matematică reprezintă o continuare a cursului F.01.O.001 Analiza matematică I și continuă în cadrul unității de curs S1.03.O.023 Analiza matematică III. Acest curs servește drept fundament și pentru unitățile de curs: S1.04.O.033 Ecuații diferențiale, S1.04.O.034 Analiza complexă, S1.06.O.056 Geometria diferențială și topologia, S1.06.A.059 Aplicații ale calculului diferențial, S1.06.A.060 Aplicații ale calculului integral, M.07.A.068 Teoria măsurii și integrala Lebesgue, M.07.A.069 Elemente de analiză funcțională, M.07.A.070 Ecuații cu derivate parțiale, M.07.A.071 Ecuațiile fizicii matematice.

Conform Curriculum-ului național la matematică pentru clasele a X-a – a XII-a, elementele de analiză matematică și anume primitiva și integrala definită se studiază în regim obligatoriu atât în clasele cu profil real cât și în cele cu profil umanistic. Tematica acestei unități de curs: integrale nedefinite, integrale definite, integrale improprii, serii, este inclusă în toate programele de studii cu specializare matematică.

Reieșind din interesele viitorului profesor de matematică considerăm că problemele fundamentale abordate în cadrul acestui curs constituie un element absolut necesar al culturii matematice, o parte indispensabilă a pregătirii profesorilor de matematică.

### Competențe prealabile

#### i) *Competențe cognitive:*

- de explicare a conceptelor de bază ale cursului F.01.O.001 Analiza matematică I: noțiune de limită a unui șir numeric, noțiune de limită a unei funcții într-un punct, noțiune de funcție continuă, derivata funcției, diferențiala funcției;
- de descriere a proprietăților șirurilor numerice convergente, ale funcțiilor continue, ale funcțiilor derivabile.
- de descriere a metodelor de aplicare a derivatelor funcției în studiul funcțiilor și în contextul anumitor probleme aplicative.

#### ii) *Competențe de aplicare:*

- de studiere la convergență a șirurilor numerice;
- de studiere la continuitate a funcțiilor de o variabilă reală;
- de aplicare a proprietăților funcțiilor continue în rezolvarea problemelor;
- de calculul al derivatelor funcțiilor reale de o variabilă reală;
- de ridicare a nedeterminărilor aplicând regulile lui l'Hospital;

- de studiere completă a funcțiilor cu ajutorul derivatelor ei;
- de aplicare a teoremelor de bază ale calculului diferențial la rezolvarea problemelor.

## Competențe dezvoltate în cadrul cursului

### i) *Competențe cognitive:*

- de explicare, exemplificare și operare cu conceptele de bază ale calculului integral al funcțiilor de o variabilă reală, ale teoriei seriilor numerice și funcționale;
- de analiză cognitivă a metodelor și tehnicilor de integrare;
- de descriere a problemelor care pot fi rezolvate aplicând integrala definită, teoria seriilor numerice și funcționale.

### ii) *Competențe de aplicare:*

- de aflare a primitivelor funcțiilor de o variabilă reală;
- de aplicare a integralei definite la rezolvarea unor probleme de geometrie și mecanică;
- de studiere la convergență a integralelor improprii de speța I și II, a seriilor numerice și funcționale;
- de argumentare a metodelor de rezolvare a problemelor din diferite compartimente ale disciplinei;
- de transfer al cunoștințelor teoretice dobândite în cadrul studierii cursului în diverse domenii ale activității profesionale;
- de propunere a procedeeelor, metodelor, tehnicilor aplicate în Analiza matematică II pentru rezolvarea adecvată a unor probleme din alte domenii.

### iii) *Competențe de analiză și predicție:*

- de descriere a etapelor de introducere a conceptului de primitivă, integrală definită, integrală improprie, serie numerică, serie funcțională;
- de modelare a unor procese reale, de formulare a ipotezelor, de determinare a traseului de rezolvare a problemelor corespunzătoare;
- de determinare a traseului de rezolvare și de formulare a concluziilor referitoare la problemele ce pot fi soluționate aplicând cunoștințele și deprinderile formate în cadrul cursului.

### iv) *Competențe de comunicare:*

- de explicare în limba maternă într-o manieră clară și precisă, oral și în scris, a conținuturilor teoretice de bază ale Analizei matematice II;

- de descriere a tehnicilor specifice disciplinei.

v) *Competențe de învățare:*

- de formulare a obiectivelor cognitive și de alegere a căilor de atingere a lor, aplicând diverse operații mintale așa ca observația, comparația, generalizarea, analiza și sinteza, inducția și deducția, analogia, modelarea etc.

### Finalitățile unității de curs

La finalizarea studierii unității de curs studentul va fi capabil:

1. Să explice și să exemplifice conținuturile teoretice, metodele și tehnicile de bază ale unității de curs Analiza matematică II.
2. Să identifice și să aplice diverse metode de calcul al integralelor nedefinite.
3. Să identifice și să aplice diverse tehnici de integrare a funcțiilor reale la soluționarea unor probleme cu caracter aplicativ.
4. Să identifice și să aplice diverse criterii de convergență a integralelor improprii, seriilor numerice și seriilor funcționale.
5. Să aplice dezvoltările în serie a funcțiilor de o variabilă reală la soluționarea unor probleme.
6. Să aplice cunoștințele din domeniul acestei unități de curs la predarea cursului liceal de matematică.

### Conținuturi

Unitatea de curs „Analiza matematică II” este divizată în 6 unități de învățare.

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
	<b>Unitatea de învățare I. Integrala nedefinită</b>			
1.	Definiția și proprietățile de bază ale integralelor nedefinite.	2	1	2
2.	Metodele de bază de calcul al integralelor nedefinite.	2	2	2
3.	Integrarea funcțiilor raționale simple.	1	1	2
4.	Integrarea funcțiilor raționale.	2	2	2
5.	Integrarea unor expresii iraționale.	4	3	4
6.	Integrarea unor expresii ce conțin funcții trigonometrice.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 1.</i>		2	4
	<b>Unitatea de învățare II. Integrala definită</b>			
7.	Noțiune de integrală definită.	2		2
8.	Sume Darboux. Condițiile de integrabilitate ale unei funcții.	2		2

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
9.	Proprietățile de bază ale integralei definite.	2		2
10.	Integrala definită cu limita superioară variabilă. Formula Newton–Leibniz.	2	1	1
11.	Integrarea prin părți și schimbarea de variabilă în integrala definită.		1	1
	<i>Testul de evaluare nr. 2.</i>	2		4
	<b>Unitatea de învățare III. Aplicații ale integralei definite în geometrie și mecanică</b>			
12.	Figuri măsurabile. Exprimarea ariei unei figuri măsurabile printr-o integrală definită.	3	3	2
13.	Corpuri măsurabile. Exprimarea volumului unui corp măsurabil printr-o integrală definită.	2	2	2
14.	Curbe rectificabile. Calculul lungimii arcului de curbă.	2	2	2
15.	Unele aplicații ale integralelor definite în mecanică.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 3.</i>		2	4
	<b>Unitatea de învățare IV. Integrale improprii</b>			
16.	Integrale improprii de speța I.	3	2	2
17.	Integrale improprii de speța a II-a.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 4.</i>	2		4
	<b>Unitatea de învățare V. Serii numerice</b>			
18.	Serii numerice. Proprietățile seriilor convergente.	2	2	2
19.	Serii numerice pozitive.	3	2	2
20.	Serii alternante.	2	2	2
21.	Serii numerice absolut convergente. Proprietățile lor.	2	1	2
	<i>Testul de evaluare nr. 5.</i>		2	4
	<b>Unitatea de învățare VI. Șiruri și serii de funcții</b>			
22.	Șiruri și serii de funcții de o variabilă reală.	2	1	2
23.	Proprietățile șirurilor și seriilor funcționale uniform convergente.	2	1	2
24.	Serii de puteri.	3	2	2
25.	Serii Taylor.	3	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 6.</i>	2		4
	<i>Testul de evaluare finală</i>			5
	<b>TOTAL</b>	<b>60</b>	<b>45</b>	<b>75</b>

## Activități de lucru individual

Activitatea individuală este o componentă obligatorie a activității de instruire. În cadrul studierii acestui curs, studenților li se vor propune o serie de teme și probleme care urmează a fi studiate și soluționate independent. Însărcinările pentru lucrul individual sunt lansate în cadrul prelegerilor.

Studentul trebuie să rezolve într-un caiet problemele propuse, precum și problemele din manualul de Matematică pentru clasa a XII-a aferente temelor studiate. Rezolvările trebuie să fie detaliate, însoțite de explicațiile de rigoare. Este binevenită rezolvarea exemplurilor și din alte surse, selectate de student. Se va aprecia utilizarea resurselor scrise în limbi străine.

Se recomandă de a prezenta regulat pe parcursul semestrului caietul pentru verificare. Nota pentru lucrul efectuat se va da la sfârșitul semestrului.

## Evaluare

Cunoștințele, capacitățile și competențele studenților vor fi evaluate pe parcursul semestrului. Sunt planificate 6 teste de evaluare curentă. În cazul în care studentul lipsește motivat la una din testări, după reîncadrarea lui în procesul de studii, timp de o săptămână, urmează a fi programată și ulterior realizată testarea suplimentară.

Evaluarea finală are loc sub forma unui examen scris. Durata examenului este de 2 ore și 15 minute.

Nota finală la unitatea de curs „Analiza matematică II” se calculează conform formulei:

$$N_f = 0.6 \times n_m + 0.4 \times n_e,$$

unde  $N_f$  este nota finală,  $n_m$  este nota medie, calculată cu precizia de până la sutimi și reprezintă media aritmetică a notelor pentru testele curente și pentru sarcinile de lucru independent,  $n_e$  nota de la examen.

## Model de test de evaluare finală

- a) Definiți noțiunea de primitivă a unei funcții  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

b) Definiți noțiunea de integrală nedefinită a unei funcții  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

c) Demonstrați că  $\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$ .
- a) Definiți fracțiile raționale simple.

b) Explicați metoda de integrare a fracțiilor raționale simple de forma  $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ , unde  $b^2 - 4ac < 0$ , indicând toate transformările și rezultatul final.

c) Exemplificați metoda expusă cu ajutorul exemplului  $I = \int \frac{2x + 7}{x^2 + 3x + 7} dx$ .



3. a) Indicați substituția cu ajutorul căreia poate fi raționalizată integrala de tipul

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

și demonstrați că substituția indicată raționalizează integrala dată.

- b) Indicați substituția cu ajutorul căreia poate fi raționalizată integrala de tipul

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

și demonstrați că substituția indicată raționalizează integrala dată.

- c) Indicați substituția cu ajutorul căreia poate fi raționalizată integrala

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}}$$

și calculați integrala.

4. a) Definiți noțiunea de diviziune a unui segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  și noțiunea de normă a diviziunii.

- b) Definiți noțiunea de sistem de puncte intermediare asociat unei diviziuni a segmentului  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

- c) Definiți noțiunea de sumă integrală Riemann.

- d) Definiți noțiunea de funcție integrabilă pe un segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  și integrală definită.

5. a) Explicați cum se aplică integrala definită la calculul ariilor domeniilor plane mărginite de curbe definite de ecuații în coordonate polare.

- b) Schițați figura plană mărginită de curba definită de ecuația polară  $\rho = 2 \sin 4\varphi$ .

- c) Calculați aria figurii plane construite.

6. a) Descrieți formulele de calcul a lungimii unui arc de curbă pentru trei moduri diferite de definiție a curbei.

- b) Aflați lungimea arcului de curbă definită de ecuațiile parametrice  $x(t) = R(\cos t + t \sin t)$ ,  $y(t) = R(\sin t - t \cos t)$  de la  $t_1 = 0$  până la  $t_2 = \pi$ .

7. a) Calculați sau demonstrați divergența integralei  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ .

- b) Calculați sau demonstrați divergența integralei  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$ .

8. a) Definiți noțiunea de serie numerică convergentă.

- b) Formulați și demonstrați condiția necesară de convergență a unei serii numerice.

- c) Demonstrați că seria armonică este divergentă.

9. Studiați la convergență seriile numerice date. Indicați testul de convergență aplicat și argumentați concluziile cu formulările exacte ale teoremelor aplicate.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{5n^5 - 4}.$$

$$\text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{5n^2 - 4}.$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot n!}.$$

10. Dezvoltați în serie Taylor funcția  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ ,  $x_0 = 5$  și indicați domeniul de convergență a seriei obținute.

### Principii de lucru în cadrul disciplinei

1. Fiecare oră de curs va începe cu un scurt rezumat (în scris timp de 5 minute) al temei studiate la cursul precedent.
2. Este salutată poziția activă a studentului, care studiază independent noi conținuturi ce țin de curs, care propune pentru discuție probleme selectate din literatura de specialitate, formulează întrebări în cadrul orelor de curs și a orelor practice.
3. Nu este salutată întârzierea la ore.
4. În cadrul disciplinei o atenție sporită va fi oferită respectării principiilor etice. Prezentarea unor soluții a sarcinilor, preluate de la colegi sau din alte surse, preluarea informațiilor din diverse surse, fără a face trimitere la sursă, va fi considerată plagiat și va fi sancționată prin note de „1”.

### Resursele informaționale la disciplină

1. Кудрявцев, Л. Д., *Математический анализ*, т. 1, Москва: Высшая школа, 1970.
2. Fihtengolț, G.M., *Curs de calcul diferențial și integral*, v. 1, 2., București: Ed. Tehnică, 1963.
3. Зорич, В. А., *Математический анализ*, ч. 1,2, Москва: ФАЗИС, 1997.
4. Bivol, L., Bulat, M., *Lecții la analiza matematică*, v. 1,2, Chișinău: EVRICA, 2002.
5. Штернтал, А. Ф., *Вступительные лекции по анализу математическому*, Кишинэу: Лумина, 1966.
6. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. *Основы математического анализа*, т. 1, 2, Москва: Наука, 1980.

7. Демидович, Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, Москва: Наука, 1979.
8. Берман, Г. Н., *Кулежере де проблеме ла анализа математикэ*, Кишинэу: Лумина, 1968.
9. Давыдов, Н.А., *Сборник задач по математическому анализу*, Москва: Просвещение, 1973.
10. Кузнецов, Л. А., *Сборник заданий по высшей математике*, Москва: Высшая школа, 1994.
11. Запорожец, Г. И., *Руководство к решению задач по математическому анализу*, Москва: Высшая школа, 1966.
12. Trench W. F., *Introduction to real analysis*, Acces liber la adresa web:  
[http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH\\_REAL\\_ANALYSIS.PDF](http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/TRENCH_REAL_ANALYSIS.PDF)
13. Krantz S., *Calculus demystified*, McGRAW-HILL, 2003.