

Ministerul Educației al Republicii Moldova  
Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți  
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului  
Catedra de Matematică și Informatică

Curriculum pentru unitatea de curs

# Analiza complexă

Studii cu frecvență la zi

Bălți, 2014

Curriculum-ul la unitatea de curs *Analiza complexă* a fost discutat la ședința Catedrei de Matematică și Informatică, Procesul-verbal nr. 12 din 30.05.14

Șeful Catedrei \_\_\_\_\_ conf. univ., dr., Eugeniu Plohotniuc

Curriculum-ul la unitatea de curs *Analiza complexă* a fost aprobat la ședința Consiliului Facultății de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Procesul-verbal nr. 9 din 19.06.14

Decanul Facultății \_\_\_\_\_ prof. univ., dr. hab., Pavel Topală

## Informații de identificare a cursului

**Facultatea:** Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului

**Catedra:** Matematică și Informatică

**Domeniul general de studiu:** 14 Științe ale Educației

**Domeniul de formare profesională:** 141 Educație și formarea profesorilor

**Denumirea specializării:** 141.01 Matematică și 141.02 Informatică, ciclul I, studii superioare de licență

**Denumirea disciplinei:** *Analiza complexă*

**Administrarea unității de curs:**

Codul unității de curs	Credite ECTS	Total ore	Repartizarea orelor				Forma de evaluare	Limba de predare
			Prel.	Sem.	Lab.	S.ind.		
S1.04.O.034	4	120	45	30	–	35	Examen	română/ rusă/ engleză

**Anul de studiu și semestrul în care se studiază disciplina:** anul II, semestrul IV

**Regimul disciplinei (obligatorie/opțională/la liberă alegere):** obligatorie

**Categoria formativă:** unitate de curs de orientare spre specializarea de bază (matematica).

## Informații referitoare la cadrul didactic

Titularul cursului – Natalia Gașițoi, dr. în matematică, lector superior la catedra de matematică și informatică, a absolvit Universitatea de Stat „Alec Russo” din Bălți, specializarea „Matematică și Informatică.” A susținut teza de doctor la Institutul de Matematică „Simion Stoilow” al Academiei Române.

*Biroul:* aula 208.

*Telefon:* 0 231 52 337

*E-mail:* natalia.gasitoi@gmail.com

*Orele de consultații:* joi, 14<sup>10</sup> – 15<sup>30</sup>. Consultațiile se oferă atât în regim „față - în - față”, cât și prin utilizarea poștei electronice sau Skype. Numele în Skype: n.gasitoi



## Integrarea cursului în programul de studiu

Analiza complexă îmbină armonios metodele analitice și geometrice clasice precum și metode noi specifice. Multe chestiuni din analiza clasică au devenit clare și au fost complet rezolvate numai datorită trecerii la studiul funcțiilor de variabilă complexă.

Noțiunile de bază și metodele Analizei complexe (dezvoltarea în serie, aplicațiile conforme, calculul integralelor cu ajutorul teoriei reziduurilor etc.) își găsesc numeroase aplicații atât în cercetările din analiza funcțională, algebră, topologie, geometrie diferențială, ecuații diferențiale ordinare și cu derivate parțiale ș.a., cât și în diverse probleme aplicative din fizica teoretică, hidrodinamică, teoria elasticității ș.a. Unitatea de curs este destinată studenților de la specializarea „Matematică și Informatică”, dar poate fi propusă ca disciplină opțională studenților specializați în fizică sau informatică.

Scopurile și conținutul cursului sunt corelate cu scopurile și conținuturile unităților de curs: S1.04.O.033 Ecuații diferențiale, S1.06.O.056 Geometria diferențială și topologia, S1.06.A059 Aplicații ale calculului diferențial, S1.06.A.060 Aplicații ale calculului integral, M.07.A.069 Elemente de analiză funcțională, M.07.A.072 Ecuații cu derivate parțiale.

Conform Curriculum-ului național la matematică pentru clasele a X-a – a XII-a, modulul „Numere complexe” se studiază în regim obligatoriu atât în clasele cu profil real cât și în cele cu profil umanistic. Reieșind din interesele viitorului profesor de matematică remarcăm că problemele fundamentale ale acestei teorii formează indiscutabil, un element absolut necesar al culturii matematice, cursul urmărind formarea unor competențe specifice, necesare atât în activitatea pedagogică, cât și într-o eventuală carieră de cercetător.

### Competențe prealabile

#### i) *Competențe cognitive:*

- de explicare și exemplificare a conceptelor de bază ale analizei matematice: noțiune de funcție, limita funcției într-un punct, funcții continue, funcții diferențiabile;
- de descriere a proprietăților funcțiilor continue, funcțiilor diferențiabile de una și mai multe variabile;
- de descriere a proprietăților șirurilor și seriilor de funcții;
- de descriere a proprietăților curbelor de ordinul II.

#### ii) *Competențe de aplicare:*

- de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare cu 2 și 3 necunoscute;
- de studiere a naturii șirurilor și seriilor de numere reale;
- de calculul al derivatelor parțiale ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale;

- de calculul al integralelor definite (Riemann), integralelor curbilinii, integralelor improprii;
- de determinare a domeniului de convergență al seriilor de funcții;
- de dezvoltare a funcțiilor de o variabilă reală în serie de puteri.

## Competențe dezvoltate în cadrul cursului

### i) *Competențe cognitive:*

- de explicare, exemplificare și operare cu conceptele de bază ale Analizei complexe;
- de analiză critică a a conceptelor, tendințelor și direcțiilor de dezvoltare a teoriei funcțiilor de variabilă complexă.

### ii) *Competențe de aplicare:*

- de identificare a metodelor de rezolvare și de argumentare a metodelor selectate pentru rezolvarea problemelor ce se referă la teoria generală a funcțiilor olomorfe;
- de propunere a procedeeleor, metodelor, tehnicilor aplicate în Analiza complexă pentru rezolvarea adecvată a unor probleme din alte domenii;
- de elaborare a strategiei de evaluare a activității profesionale în contextul aplicării în diverse domenii (inclusiv în cercetare) a rezultatelor, metodelor din Analiza complexă.

### iii) *Competențe de analiză și predicție:*

- de determinare a traseului de rezolvare și de formulare a concluziilor referitoare la problemele ce pot fi soluționate aplicând cunoștințele și deprinderile formate în cadrul cursului;
- de prelucrare matematică a datelor, de analiză și de interpretare a unor fenomene și procese.

### iv) *Competențe de comunicare:*

- de a explicare în limba maternă într-o manieră clară și precisă, oral și în scris, a conținuturilor teoretice de bază ale Analizei complexe;
- de descriere a tehnicilor specifice disciplinei.

### v) *Competențe de învățare:*

- de formulare a obiectivelor cognitive și de alegere a căilor de atingere a lor, aplicând diverse operații mintale așa ca observația, comparația, generalizarea, analiza și sinteza, inducția și deducția, analogia, modelarea etc.

## Finalitățile disciplinei

La finalizarea studierii disciplinei studentul va fi capabil:

1. Să explice și să exemplifice conținuturile teoretice, metodele și tehnicile de bază ale analizei complexe.
2. Să aplice cunoștințele teoretice la studiul transformărilor realizate de funcțiile complexe.
3. Să identifice și să aplice diverse metode de dezvoltare a funcțiilor în serie Taylor, serie Laurent.
4. Să aplice rezultatele de bază ale teoriei reziduurilor la calculul integralelor.
5. Să aplice cunoștințele din domeniul Analizei complexe la predarea cursului liceal de matematică, în particular al modului „Numere complexe”.

## Conținuturi

Unitatea de curs „Analiza complexă” este divizată în 7 unități de învățare.

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
	<b>Unitatea de învățare I. Numere complexe</b>			
1.	Mulțimea numerelor complexe.	2	1	1
2.	Structura metrică și topologică a mulțimii $\mathbb{C}$ .	1	1	1
3.	Șiruri de numere complexe.	1	1	
4.	Proiecția stereografică. Sfera lui Riemann.	1	1	1
5.	Serii de numere complexe.	1		
	<i>Testul de evaluare nr. 1.</i>	2		4
	<b>Unitatea de învățare II. Funcții de variabilă complexă</b>			
6.	Drumuri și curbe. Domenii.	1	1	1
7.	Definiția funcției complexe. Funcții continue.	1	1	1
8.	Funcții $\mathbb{R}$ -liniare și $\mathbb{C}$ -liniare.	1		
9.	Diferențiabilitate: $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ -diferențiabilitate.	1		1
10.	Derivata complexă.	1	1	1
11.	Funcții olomorfe.	1	1	1
12.	Funcții armonic conjugate.	1	1	1
13.	Sensul geometric al derivatei funcției complexe.	2	1	1
	<i>Testul de evaluare nr. 2.</i>		2	4

Nr. d/r	Tema	Numărul de ore		
		C	S	I
	<b>Unitatea de învățare III. Transformări conforme. Transformări liniar fracționare</b>			
14.	Transformări conforme.	1		
15.	Funcția liniar fracționară.	1		
16.	Proprietățile transformărilor liniar fracționare.	1	2	2
17.	Izomorfismele liniar-fracționare ale domeniilor principale din planul complex.	1		1
	<b>Unitatea de învățare IV. Integrarea funcțiilor complexe</b>			
18.	Integrarea de-a lungul unui drum.	2	2	1
19.	Teorema lui Cauchy.	2	1	
20.	Formula integrală Cauchy.	1	1	1
	<i>Testul de evaluare nr. 3.</i>	2		4
	<b>Unitatea de învățare V. Serii Taylor</b>			
21.	Serii funcționale.	2		1
22.	Serii de puteri.	2	2	1
23.	Serii Taylor.	1	2	1
24.	Funcții analitice. Teorema de unicitate.	1		1
	<b>Unitatea de învățare VI. Serii Laurent</b>			
25.	Serii Laurent.	2	2	1
26.	Clasificarea și caracterizarea punctelor singulare izolate.	3	2	2
	<b>Unitatea de învățare VII. Teoria generală a reziduurilor</b>			
27.	Teoria generală a reziduurilor.	2	2	1
28.	Unele aplicații ale teoriei reziduurilor.	2	2	2
	<i>Testul de evaluare nr. 4.</i>	2		4
	<i>Testul de evaluare finală</i>			4
	<b>TOTAL</b>	<b>45</b>	<b>30</b>	<b>45</b>

### Activități de lucru individual

*Sarcina nr. 1 pentru lucrul independent:* Rezolvarea problemelor propuse la *Modulul V. Numere complexe* din manualul de matematică pentru clasa a XI-a.

Studentul trebuie să rezolve într-un caiet toate problemele propuse la *Modulul V. Numere complexe* din manualul de matematică pentru clasa a XI-a, indicând numărul exercițiului,

pagina și textul propriu-zis al problemei. Rezolvările trebuie să fie detaliate, însoțite de explicațiile de rigoare.

Termenul limită de prezentare a sarcinii nr. 1 este 10 martie.

*Sarcina nr. 2 pentru lucrul independent:* Rezolvarea problemelor propuse în Notele de curs.

Studentul trebuie să rezolve într-un caiet toate problemele propuse în Notele de curs. Rezolvările trebuie să fie detaliate, însoțite de explicațiile de rigoare. Este binevenită rezolvarea exemplilor și din alte surse, selectate de student. Se va aprecia utilizarea resurselor scrise în limbi străine.

Se recomandă de a prezenta regulat pe parcursul semestrului caietul pentru verificare. Nota pentru lucrul efectuat se va da la sfârșitul semestrului.

Termenul limită de prezentare a sarcinii nr. 2 este 15 mai.

## Evaluare

Cunoștințele, capacitățile și competențele studenților vor fi evaluate pe parcursul semestrului. Sunt planificate 4 teste de evaluare curentă. În cazul în care studentul lipsește motivat la una din testări, după reîncadrarea lui în procesul de studii, timp de o săptămână, urmează a fi programată și ulterior realizată testarea suplimentară.

Evaluarea finală are loc sub forma unui examen scris. Durata examenului este de 2 ore și 15 minute.

Nota finală la unitatea de curs „Analiza complexă” se calculează conform formulei:

$$N_f = 0.6 \times n_m + 0.4 \times n_e,$$

unde  $N_f$  este nota finală,  $n_m$  este nota medie, calculată cu precizia de până la sutimi și reprezintă media aritmetică a notelor pentru testele curente și pentru sarcinile de lucru independent,  $n_e$  nota de la examen.

## Model de test de evaluare finală

- ① a) Să se definească noțiunea de rădăcină de ordinul  $n$  dintr-un număr complex.  
b) Să se deducă formula de calcul a valorilor rădăcinii de ordinul  $n$  dintr-un număr complex  $z$ .  
c) Să se afle rădăcinile de ordinul 6 din numărul  $z = -64$ .  
d) Să se reprezinte pe planul complex valorile rădăcinii  $\sqrt[6]{-64}$ .
- ② a) Descrieți proiecția stereografică.  
b) Scrieți formulele proiecției stereografice.



- ③ a) Definiți noțiunea de funcție complexă.  
 b) Aflați imaginea dreptei  $x = 1$  la transformarea realizată de funcția  $w = z^2$ .  
 c) Realizați construcția grafică corespunzătoare.
- ④ a) Să se scrie forma creșterii funcției  $f(z)$   $\mathbb{R}$ -diferențiabilă în punctul  $z_0$ .  
 b) Să se scrie forma creșterii funcției  $f(z)$   $\mathbb{C}$ -diferențiabilă în punctul  $z_0$ .  
 c) Să se scrie condiția de diferențiabilitate complexă (în formă complexă) a unei funcții într-un punct.  
 d) Să se afle punctele în care este  $\mathbb{C}$ -diferențiabilă funcția

$$f(z) = z^2\bar{z} - 2iz\bar{z} + \sqrt{3}i\bar{z} - 5z + 2i.$$

- ⑤ a) Să se demonstreze că există funcții olomorfe partea reală a cărora este  
 $u(x, y) = -2e^x \sin y + 3x^2 - 3y^2 - 4x + 1$ .  
 b) Să se afle funcția  $v(x, y)$  armonic conjugată funcției  $u(x, y)$ .  
 c) Să se restabilească funcția olomorfă  $f$ , care ar satisface condițiile  $\operatorname{Re} f = u(x, y)$ ,  
 $\operatorname{Im} f = v(x, y)$ ,  $f(0) = 1 + 2i$ .

- ⑥ Să se afle imaginea discului  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  din planul complex al variabilei  $z$  la transformarea realizată de funcția  $w = \frac{2z - i}{z + 1}$ . Argumentați metoda de rezolvare și formulați proprietățile transformărilor Möbius aplicate.

- ⑦ Prin două metode să se calculeze  $\int_{\partial D} \frac{e^z}{z^3(z-3)} dz$ , unde  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\}$ .

- ⑧ Fie  $f(z) = \frac{z - i}{z^2 + 2z - 8}$ ,  $z_0 = 0$ .

- a) Să se împartă planul complex în domenii circulare, centrate în punctul  $z_0$ , pe care funcția  $f(z)$  poate fi dezvoltată în serie Laurent.  
 b) Să se afle dezvoltările funcției  $f(z)$  în serie Laurent în fiecare din aceste domenii.

## Principii de lucru în cadrul disciplinei

1. Fiecare oră de curs va începe cu un scurt rezumat (în scris timp de 5 minute) al temei studiate la cursul precedent.
2. Este salutată poziția activă a studentului, care studiază independent noi conținuturi ce țin de curs, care propune pentru discuție probleme selectate din literatura de specialitate, formulează întrebări în cadrul orelor de curs și a orelor practice.

3. Nu este salutată întârzierea la ore.
4. În cadrul disciplinei o atenție sporită va fi oferită respectării principiilor etice. Prezentarea unor soluții a sarcinilor, preluate de la colegi sau din alte surse, preluarea informațiilor din diverse surse, fără a face trimitere la sursă, va fi considerată plagiat și va fi sancționată prin note de „1”.

## Resursele informaționale la disciplină

1. Gașițoi, N., *Analiza complexă*, Curs universitar, Bălți, 2014.
2. Шабат Б.В., *Введение в комплексный анализ*, ч. I, Москва, Наука, 1985.
3. Привалов И. И., *Вступительные лекции по теории функций комплексного переменного*, ед. Лумина, Кишинэу, 1969.
4. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А., *Введение в теорию аналитических функций*, Москва, Просвещение, 1977.
5. Hamburg P., Mocanu P., Negoescu N., *Analiză matematică (funcții complexe)*, Editura didactică și pedagogică, București, 1982.
6. Rudin W., *Analiza reală și complexă*, Editura Theta, București, 1999.
7. Strătilă Ș., *Introducere în analiza complexă*, Editura Theta, București, 2013.
8. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И., *Лекции по теории функций комплексного переменного*, Москва, Наука, 1982.
9. Домрин А.В., Сергеев А.Г., *Лекции по комплексному анализу*, Москва, 2004.
10. Halanay A., *Elemente de analiză complexă*, Matrix Rom, București, 1999.
11. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г., *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, Москва, Наука, 1975.
12. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В. и др., *Сборник задач по теории аналитических функций*, Москва, Наука, 1969.
13. Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А., *Задачник-практикум по теории аналитических функций*, Москва, Просвещение, 1976.
14. Jude L., Bercia R., *Probleme de funcții complexe*, Matrix Rom, București, 1998.
15. Ahlfors L., *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1979.

16. Lang S., *Complex Analysis*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1985.
17. Greene R., Krantz S., *Function theory of one complex variable*, Wiley-Interscience Publ., 1997.
18. Spiegel M., *Theory and problems of complex variables with an introduction to conformal mapping and its application*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Co., 1974.