В. П. Игумнов
Л.А. Игумнова

О задаче разбиения натурального числа и задаче вычисления коэффициентов рядов Ли при решении дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений

С биографическим очерком первого автора

Авторская редакция

Пятигорск, 2018 г.

Всякое коммерческое использование данного пособ
ия возможно исключительно с разрешения авторов.

©В.П. Игумнов, Л.А. Игумнова, 2018 г.

Аннотация

Книга предназначена для студентов и преподавателей ВУЗов, написана очень подробным ясным языком. Может быть также интересна всем, кто интересуется вопросами математики, полезна при выборе тем курсовых и дипломных работ.

Посвящается светлой памяти моих родителей: моего отца Игумнова Петра Николаевича – учителя математики, и моей матери Игумновой Лидии Васильевны. В тяжелые послевоенные годы они воспитали пять своих детей и двух сирот, у которых отец погиб на войне, а мать попала под поезд.

В атмосфере глобального воинствующего атеизма родители воспитывали своих детей в духе христианского миросозерцания.

Из семи шесть получили высшее образование.

В.П. Игумнов.

Предисловие

Эта книга содержит пять глав , которые разделены на два раздела . Первый раздел содержит первые три главы , а второй - две её последние главы . Чтение первого раздела требует математической подготовки . Основным содержанием второго раздела не является математика и его чтение математической подготовки не требует . Лишь в первых трёх параграфах четвёртой главы упоминается математика . Каждый из этих трёх параграфов состоит из двух частей . Математика упоминается только в первой части каждого из этих параграфов .

Ряды Ли были введены в рассмотрение Софусом Ли (см. [74]), но сам Софус Ли не придавал им большого значения. Более поздние исследователи также не придавали этим рядам надлежащего значения, не обратили внимания на их многочисленные приложения, и они были почти забыты. Систематическое изложение теории рядов Ли дается в монографии профессора Инсбрукского университета Вольфганга Грёбнера (см. [68]).

Наверное, не ошибусь, если скажу, что первая книга о рядах Ли на русском языке была написана профессором Филатовым Александром Николаевичем (см. [19]). Когда я написал кандидатскую диссертацию, Александр Николаевич не только дал о ней положительный отзыв, но и познакомил меня с академиком Бондаренко Борисом Анисимовичем. В их совместной книге «Квазиполиноминальные функции и их приложения к задачам теории упругости», Ташкент, 1978, сделана ссылка на одну из моих статей. В этой книге построен новый класс специальных функций, названных квазиполиноминальными, и даются приложения разработанного математического аппарата к решению задач теории упругости.

Александр Николаевич открыл мне дверь в науку, называемую математикой, и для меня незабываем. Царствие ему Небесное и вечная светлая Память.

Борис Анисимович занимался дифференциальными уравнениями, дискретной математикой и комбинаторным анализом, написал более 200 научных работ, среди них 12 монографий. Две монографии связаны с именем Паскаля: «Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля» и «Jeneralized Pascal Trianghlers and Piramids, their Fractals, Graphs, and Application, 1993). Вторая книга трижды переиздавалась в США Фибоначчиевой Ассоциацией. Международным Биографическим центром в Кембридже Бондаренко Б. А. включен в число 100 наиболее выдающихся ученых мира за 2008 и 2012 годы. (См. В. И. Заляпин, В. В. Карачик, Л. Д. Менихес, Е. В. Харитонова. Борис Анисимович Бондаренко. К 90-летию со дня рождения. Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика» 2015, том 7, №1).

В одном телефонном разговоре Борис Анисимович обратил мое внимание на Блеза Паскаля, о котором я мало знал, знал лишь то, что он физик и математик с мировым именем. Желая узнать о нем больше, я увидел в нем философа, глубоко понявшего Учение Христа и понявшего значимость этого Учения для человечества. Блез Паскаль писал: «Иисус Христос есть центр Вселенной и цель, к которой мы все стремимся. Без учения Христа люди съели бы друг друга, мир сделался бы адом и развратился бы». Не знаю, был ли знаком с приведенными словами Федор Михайлович Достоевский, но известно, что Христа он назвал «великим и конечным идеалом развития всего человечества» (см. [55], [57]).

В моей душе живет глубокая благодарность Борису Анисимовичу – замечательному человеку и выдающемуся ученому за то большое внимание, которое он уделял мне. Царствие ему Небесное и вечная светлая память.

После окончания мной Иркутского университета профессор Бельтюков Борис Альбертович взял меня на должность ассистента кафедры математического анализа Иркутского педагогического института, которой он заведовал, а затем и к себе в аспирантуру. В мою бытность аспирантом в Иркутский педагогический институт приезжал профессор Белоносов Сергей Михайлович, с которым Борис Альбертович познакомил своих аспирантов. О Сергее Михайловиче скажу хотя бы немного далее.

Борис Альбертович занимался научной и педагогической работой, готовил из молодых преподавателей кафедры квалифицированных специалистов. Он помогал в моем становлении преподавателя высшей школы, дал тему моей кандидатской диссертации и ввел меня в мир интегральных уравнений, оказывал мне всестороннюю помощь и поддержку. За всё сделанное для меня , я очень благодарен ему, и он для меня незабываем . Царствие ему Небесное и вечная светлая память.

С Белоносовым Сергеем Михайловичем мы переписывались и общались по телефону, для меня незабываема его помощь и поддержка. Благодаря ему две мои статьи изданы Академией наук СССР, благодаря ему я познакомился с книгой W. Schmeidler. Integralgleichunden mit Anwendungen in Phyzik und Technik. Akad. VerlGes, Leipzig, 1950.

Научным руководителем аспирантуры Сергея Михайловича был академик Смирнов Владимир Иванович. После аспирантуры Сергей Михайлович защитил докторскую диссертацию и занимался научной работой едва ли не до последнего дня своей жизни. В некрологе, подписанном академиком Лаврентьевым Михаилом Михайловичем и другими известными математиками нашей страны, говорится: «Результаты Сергея Михайловича Бессонова по теории интегральных уравнений, математической физике, вычислительной математике входят в золотой фонд достижений математической школы СССР». Я глубоко благодарен Сергею Михайловичу за все сделанное для меня. Царствие ему Небесное и вечная светлая память.

Для меня незабываемы мои школьные учителя, Иркутский университет и его преподаватели, давшие мне математическое образование. Моим школьным учителям и преподавателям университета, моя глубокая благодарность, Царствие им Небесное и вечная светлая Память.

На моем жизненном пути встретилось много математиков, которые присылали мне приглашения на математические конференции, слушали мои доклады, читали мои работы и оказывали мне помощь и поддержку. Мне хотелось бы назвать их имена: профессор Бахвалов Николай Сергеевич, профессор Быков Яков Васильевич, профессор Вайнберг Мордухай Моисеевич, профессор Васильев Владимир Владимирович, доцент Головачик Петр Иванович, доцент Куликова Мария Фёдоровна, профессор Мамий Казбек Сагидович, профессор Меньшикова Вера Ивановна, профессор Микаелян Исай Иванович, доцент Назаров Василий Иванович, академик Никольский Сергей Михайлович, профессор Платонов Михаил Леонидович, профессор Привалов Андрей Андреевич, доцент Протасов

Виктор Иванович, профессор Руденко Виктор Григорьевич, доцент Степанов Игорь Дмитриевич . профессор Харкиевич Юрий Фёдорович , доцент Хлопонин Станислав Серафимович, доцент Такайшвилли Константин Георгиевич , доцент Шелковников Феодосий Алексеевич , профессор Шемякина Тамара Кузьминична, профессор Юдович Виктор Иосифович.

В этой книге подытоживаются результаты, опубликованные в работах [25]-[57], моя первая маленькая заметка была опубликована в 1965 году.

Учась в Иркутском университете, в курсе теоретической механики я обратил внимание на законы Кеплера. Представил себе громадную эллиптическую орбиту, Солнце, находящееся в фокусе эллипса, перемещающуюся по эллиптической орбите Землю, изменение времен года, связанное с этим перемещением, смену дня и ночи, связанную с вращением Земли вокруг собственной оси, и понял, что никто, кроме Бога-Творца Миров и Вселенных не мог продумать, воплотить в материальные формы и привести в рабочее состояние всю эту грандиозную систему.

Путь научного знания является одним из путей к Богу. Идя путем научного знания, Иоганн Кеплер, Макс Борн и другие учёные поднимались на те высоты понимания величия Божия, которые возможны для человеческого разума. Приведу заслуживающие внимания слова Владимира Владимировича Набокова: «К Богу приходят не экскурсии с гидом, а одинокие путешественники» (В.В. Набоков – русский и американский писатель, писатель с мировым именем). Исаак Ньютон при одном слове Бог снимал с себя шляпу. Ему принадлежат слова: «Небесный Владыка управляет миром как Властитель Вселенной». Иоганн Кеплер писал: «Я хотел стать теологом, но сейчас я вижу, как Бог прославляется через мой труд в астрономии, так как небеса вращаются и возвещают славу Божию».

Открыв законы, касающиеся Земли и других планет солнечной системы, он написал: «Тебе воздаю я славу, Творец и Бог, за то, что Ты даровал мне радость Своего творения, и я восхищаюсь делами рук Твоих». Макс Борн в своей итоговой книге «Моя жизнь и взгляды» написал: «Мы – атом и я – были дружны до самого последнего времени. Я видел в нем ключ к глубочайшим тайнам природы, и он открыл мне величие творения и Творца».

Многие ученые, прежде всего физики, создававшие фундамент сегодняшнего технического прогресса, открывавшие законы, установленные Богом, приходили к пониманию величия Божия.

Путь научного знания, развивающий интеллект человека, идущего этим путем – трудный и не всем доступный путь. Путь, доступный всем, указал Христос, и начинается этот путь с исполнения заповеди Христа: **«Итак, во всем, как хотите, чтобы с вами поступали люди, так поступайте и вы с ними; ибо в этом закон и пророки», (Евангелие от Матфея, гл. 7, ст.12).** Будучи студентом , я прочитал **Евангелия от Матфея , Марка , Луки и Иоанна , в** которых излагается учение Христа . Прочитав эти четыре Евангелия, я понял, что Христос - Великий Учитель человечества и возлюбленный Сын Божий, а также понял, что если бы исполнялась процитированная заповедь Христа, то исполнение одной этой заповеди изменило бы и людей и мир, в котором мы живем, и сделало бы наш мир неузнаваемым.

Христос показал людям как нужно жить и как нужно умирать . Распятый на кресте , Он жалел своих палачей и обратился к Отцу Небесному со словами : **«Отче ! прости им , ибо не ведают , что творят» (Евангелие от Луки , гл . 23 , ст. 34) .**

На протяжении тысячелетий ведутся войны и перед человеком , живущем в этом мире , может быть поставлен выбор одного из двух путей .

Первый путь – быть палачом своих палачей , т. е. опуститься до их уровня . Если человек не верит в Бога и не верит в то , что жизнь после смерти человека продолжается , то он выбирает этот путь . Этот путь выбирают не только люди не верящие в Бога , но и люди , считающие , что они верят в Бога. Этим путём человечество идёт уже не одно тысячелетие .

Об этом пути написал Лев Николаевич Толстой в своём небольшом произведении : «Сказка об Иване – дураке и его двух братьях : Семёне – воине и Тарасе – брюхане и немой сестре Малайне и о старом дьяволе и трёх чертенятах» . В этом небольшом произведении он показал к чему приходят люди этим путём . В этой сказке , которая легко читается и взрослыми и детьми , Лев Николаевич также написал о пути , указанном людям Христом .

Эта сказка не была понята в то время , когда она была написана . Такой же она остаётся и сегодня . И сегодня для большинства читателей , прочитавших это небольшое произведение писателя с мировым именем , это произведение остаётся детской сказкой , не имеющей отношения к реальной действительности .

Второй путь , который может выбрать человек , – быть жертвой и уйти в тот мир , о котором мы очень мало знаем , оставаясь на той высоте , которую ему удалось достигнуть за время прожитой жизни . Человек , достигший святости, освобождается от страха смерти. Апостол Павел писал : « **Для меня жизнь – Христос , и смерть – приобретение»** (Послание к филиппийцам Святого Апостола Павла , гл . 1 , ст. 2 1) .

Антон Павлович Чехов в письме своему брату Александру писал : «Лучше быть жертвой , чем палачом» . То что понимал Антон Павлович , хорошо понимали первохристиане .

Эта книга может быть полезна аспирантам и студентам, специализирующимся в области математики, а также преподавателям математики при подборе тем курсовых и дипломных работ.

Эту книгу меня побудила написать моя племянница Лариса, дочь моего двоюродного брата Игумнова Анатолия Борисовича. По моему совету в 1994 году она окончила математико-механический факультет Петербургского университета им. Ломоносова и живет в Санкт-Петербурге. Лариса оказала мне большую помощь при создании первых трех глав этой книги и приведении их к тому виду, в котором они опубликованы в этой книге. Мы многое изменяли, удаляли и добавляли, стараясь сделать текст простым и понятным. Над четвертой и пятой главами я работал один.

С братом Анатолием мы были близки характерами, задолго до смерти он говорил мне, что уйду раньше тебя из этого мира. Царствие ему Небесное и вечная светлая память. Анатолий и его сын Игорь, мой племянник, много помогали мне на моем жизненном пути, за что я очень им благодарен.

На моем жизненном пути много мне помогали самые близкие люди: моя родная сестра Лидия, братья Иннокентий и Павел, брат Николай и его жена Лидия Викторовна. Их помощь и поддержка для меня неоценимы.

Глубокую благодарность выражаю Александру Донаровичу Егорушкину и его сестре Евгении Донаровне за их помощь и поддержку на моём жизненном пути . Особая благодарность Александру Донаровичу за подаренный компьютер .

Заканчивая предисловие, выражаю глубокую благодарность Дмитрию Марковичу Заграевскому, имеющему базовое образование «Прикладная математика». Он оказывал мне неоценимую компьютерную помощь, и, владея в совершенстве английским языком, помогал писать аннотации к моим статьям.

Авторы этой книги выражают глубокую благодарность её издателю Павлу Владимировичу Петрову, очень благодарны ему за большую проделанную работу , за его большую доброжелательность и высокий профессионализм .

Эта книга посвящается светлой памяти моих родителей Петра Николаевича Игумнова и Лидии Васильевны Игумновой, светлой памяти членов нашей семьи Игоря Григорьевича и Ираиды Григорьевны Горбуновых, моих двоюродных братьев Анатолия Борисовича и Владимира Борисовича Игумновых, всех близких и дальних родственников, ушедших из этого мира, и всех замечательных людей, встретившихся на моём жизненном пути и оставивших этот мир. Всем, кому посвящается эта книга, Царствие Небесное и вечная светлая память.

Работая над этой книгой, я чувствовал помощь Божию. Без помощи Божией никакой книги бы не было.

Раздел I

Глава 1

О разбиении натурального числа и о связанном с этой задачей уравнении.

Задача о разбиении натурального числа n сводится к отысканию всех целых неотрицательных решений (ЦНР) уравнения

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n \qquad (1.0.1)$$

В этой главе изучаются свойства целых неотрицательных решений уравнения (1.0.1) с помощью вспомогательного набора уравнений. Вводится понятие матрицы ЦНР уравнения (1.0.1), которая обозначается через X_n . Матрица X_n представляет собою прямоугольную матрицу с размерами $p(n) \times n$, где $p(n)$ - число ЦНР уравнения (1.0.1). Уравнением (1.0.1) занимались такие всемирно известные математики как Готфри Гарольд Харди (1877-1947) и математический гений Индии Сринивaза Айенгар Рамунаджан (1887-1920). Функция $p(n)$ определена на множестве натуральных чисел и принимает значения из этого же множества.

Занимаясь изучением асимптотических свойств функции $p(n)$, Харди и Рамунаджан вывели формулу:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{A\cdot\mu_n}}{\mu_n}\right) + O\left(e^{H\cdot\sqrt{n}}\right),$$

где $H < A = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \mu_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$.

Этот результат опубликован в [69].

В этой главе дается метод точного вычисления значения функции $p(n)$ для любого натурального n. Этот метод докладывался на научных конференциях и публиковался в ранее опубликованных работах автора (см., например, [35]).

Отметим, что функция $p(n)$ растет очень быстро. В работе авторов [49] приведены значения этой функции для нескольких значений аргумента n: $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5, p(5) = 7, p(10) = 42, p(100) = 190\,569\,292$.

Для изучения свойств решений уравнения (1.0.1) вводится вспомогательный набор уравнений. В этой главе показано, как с помощью введённой в рассмотрение производящей матрицы, зная матрицы $X_1, X_2, \dots, X_n$, найти матрицу X_{n+1}. Кроме производящей матрицы в этой главе вводится понятие характеристической матрицы матрицы ЦНР X_{n+1} и показано, что матрица X_{n+1} состоит из строк матриц ЦНР вспомогательного набора уравнений. Характеристическая матрица позволяет указать номера тех строк матриц ЦНР вспомогательного набора уравнений, которые совпадают с i -ой строкой матрицы X_{n+1}.

§1. Изучение свойств решений уравнения, к которому сводится задача о разбиении натурального числа, с помощью вспомогательного набора уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n + (n+1)x_{n+1} = n+1 \qquad (1.1.1)$$

Натуральные числа $1,2,\dots,n+1$, входящие в левую часть уравнения (1.1.1), представляют собою коэффициенты рассматриваемого уравнения, а $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ представляют собою неизвестные целые неотрицательные числа, подлежащие определению.

Свойства целых неотрицательных решений уравнения (1.1.1), будем изучать с помощью вспомогательного набора уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \cdots + k(x_k + 1) + (k+1)x_{k+1} + \\ \qquad + \cdots + (n+1-k)x_{n+1-k} = n+1, \\ k = 1,2,\dots,\left[\frac{n+1}{2}\right], \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + \left(\left[\frac{n}{2}\right] - l\right)x_{\left[\frac{n}{2}\right]-l} + \\ + \left(\left[\frac{n+1}{2}\right] + 1 + l\right)\left(x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1+l} + 1\right) = n+1 \\ l = 0,1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]. \end{array}\right. \qquad (1.1.2)$$

Здесь $\left[\frac{n}{2}\right]$ *и* $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ - antiér (антье) чисел $\frac{n}{2}$ *и* $\frac{n+1}{2}$, каждое из входящих в (1.1.2) уравнений представляет собою предикат, а весь рассматриваемый набор уравнений (1.1.2) представляет собою дизъюнкцию этих предикатов.

Определение 1.1.1. Хотя ни одно из уравнений, входящих в (1.1.2) не содержит всех неизвестных, входящих в уравнение (1.1.1), каждое из уравнений, входящих в (1.1.2) будем считать уравнением с $n+1$ неизвестными. Если какое-либо неизвестное не входит явно в какое-то из уравнений, содержащихся в (1.1.2), то будем считать значения этого неизвестного тождественно равным нулю.

Определение 1.1.2. Целым неотрицательным решением (ЦНР) уравнения (1.1.1), а также любого из уравнений, входящих в (1.1.2), назовем вектор, размерность которого равна $n+1$, а координаты являются целыми неотрицательными числами, удовлетворяющими рассматриваемому уравнению.

Рассмотрим четыре простых утверждения о связи между ЦНР уравнения (1.1.1) и ЦНР уравнений, входящих в (1.1.2). Эти простые утверждения назовем теоремами.

Теорема 1.1.1. Всякое ЦНР любого из уравнений, входящих в (1.1.2) является также и ЦНР уравнения (1.1.1).

Доказательство.

Высказанное утверждение вытекает из того, что отличные от нуля коэффициенты любого из уравнений, входящих в (1.1.2) совпадают с соответствующими коэффициентами уравнения (1.1.1).

Теорема 1.1.2. Все ЦНР уравнения (1.1.1) содержатся среди ЦНР уравнений из (1.1.2).

Доказательство.

Замечая, что если -тая координата, $1 \le i \le \left[\frac{n+1}{2}\right]$ некоторого вектора, являющегося ЦНР уравнения (1.1.1), является натуральным числом, то этот вектор имеет не менее i последних нулевых координат, получим, что ЦНР уравнения (1.1.1) состоят из векторов вида:

$$\left(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n}, 0\right), \alpha_{i,1} \ge 1 \tag{1.1.3}$$

$$\left(0, \alpha_{j,2}, \dots, \alpha_{j,n-1}, 0, 0\right), \alpha_{j,2} \ge 1 \tag{1.1.4}$$

$$\left(0, 0, \alpha_{k,3}, \dots, \alpha_{k,n-2}, 0, 0, 0\right), \alpha_{k,3} \ge 1 \tag{1.1.5}$$

…………………………………………………

$$\left(0, 0, \dots, 0, \alpha_{m,\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \alpha_{m,\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} 0, \dots, 0, 0\right), \alpha_{m,\left[\frac{n+1}{2}\right]} \ge 1 \tag{1.1.6}$$

$$(0, 0, \dots, 0, 1) \tag{1.1.7}$$

Все вектора вида (1.1.3) содержатся среди ЦНР первого уравнения (1.1.2), все вектора вида (1.1.4) содержатся среди ЦНР второго уравнения из (1.1.2), все вектора вида (1.1.5) содержатся среди ЦНР третьего уравнения из (1.1.2) и т.д., и, наконец, два последних вектора – вектор (1.1.6), являющийся решением $\left[\frac{n+1}{2}\right]$-го уравнения, входящего в (1.1.2) и вектор (1.1.7), являющийся решением последнего уравнения из этого набора. Теорема доказана.

Теорема 1.1.3. Если некоторый $(n+1)$-мерный вектор имеет i_1–ую, i_2–ую и т.д., i_γ–ую координаты, отличные от нуля и является ЦНР уравнения (1.1.1), то он удовлетворит точно γ уравнениям, входящим в набор (1.1.2), а именно, i_1–му, i_2–му, и т.д. и, наконец, i_γ–му.

Доказательство.

Рассмотрим любой $(n+1)$-мерный вектор, имеющий γ натуральных координат, $\gamma \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, и $(n+1-\gamma)$ нулевых координат и являющийся ЦНР уравнения (1.1.1). Пусть этот вектор имеет i_1-ую, i_2-ую и т.д., и, наконец, i_γ-ую координаты, отличные от нуля. Покажем, что этот вектор удовлетворит точно γ уравнениям, входящим в набор (1.1.2), а именно, i_1-му, i_2-му, и т.д. и, наконец, i_γ-му. Рассмотрим множество всех ЦНР всех уравнений, входящих в (1.1.2). Все ЦНР, входящие в это множество, i_1–ая координата которых является натуральным числом, являются ЦНР i_1-го уравнения из (1.1.2), все ЦНР i_2–ая координата которых является натуральным числом, являются ЦНР i_2-го уравнения из (1.1.2), и т.д., все ЦНР, i_γ-ая координата которых является натуральным числом, являются ЦНР i_γ-го уравнения из (1.1.2).

Поскольку рассматриваемый вектор содержит γ натуральных координат, он одновременно должен удовлетворять i_1-му, i_2-му, и т.д. и, наконец, i_γ-му уравнениям, входящим в (1.1.2). Если бы случилось, что кроме перечисленных уравнений, рассматриваемый вектор удовлетворял бы еще какому-то из уравнений, входящих в (1.1.2), то тогда он имел бы более чем γ натуральных координат, что противоречило бы условию. Теорема доказана.

Из доказанных теорем как следствие вытекает

Теорема 1.1.4. Пусть найдены все ЦНР первых $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ уравнений, входящих во вспомогательный набор (1.1.2). Из ЦНР $k-\text{го}$ уравнения,$1 \leq k \leq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, входящего в набор (1.1.2) выберем только те, которые содержат $k-1$ первых нулевых элементов и $k-\text{й}$ элемент не меньший единицы. Полагая $k = 1,2,\dots,[\frac{n+1}{2}]$,возьмем все ЦНР первого уравнения, входящего в набор (1.1.2), к ним присоединим все ЦНР второго уравнения из этого набора, содержащие первый нулевой элемент, а второй элемент не меньший единицы. Продолжая так далее, присоединим ЦНР $\left[\frac{n+1}{2}\right]-\text{го}$ уравнения, содержащее $\left[\frac{n+1}{2}\right]-1$ первых нулевых элементов и $[\frac{n+1}{2}]$- й элемент не меньший единицы, и закончим процесс присоединения присоединением вектора, содержащего n первых нулевых координат и $(n+1)$ –ю равную единице. Закончив процесс присоединения, получим все ЦНР уравнения (1.1.1), среди которых не будет повторяющихся .

§ 2. Матрица ЦНР и ее нахождение.

В предыдущем параграфе было показано, что ЦНР уравнения (1.1.1) представляет собою $(n+1)$ - мерные вектора с целыми неотрицательными координатами вида (1.1.3)-(1.1.7), координаты которых удовлетворяют уравнению (1.1.1). Из координат этих векторов составим прямоугольную матрицу с размерами $p(n+1) \times n+1$, которую обозначим через X_{n+1} и назовем матрицей ЦНР уравнения (1.1.1),

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \alpha_{1,n} & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \alpha_{2,n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_{p(n)+1,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \alpha_{p(n)+1,n-1} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 \; \alpha_{p(n+1)-1,\left[\frac{n+1}{2}\right]} & \alpha_{p(n+1)-1,\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} & & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

Строки матрицы ЦНР расположим так, чтобы элементы первого столбца матрицы X_{n+1} образовывали невозрастающую последовательность целых неотрицательных чисел.

Определение 1.2.1. Под матрицей X_{n+1}^k, $1 \le k \le n$, будем понимать матрицу, полученную из матрицы X_{n+1-k} путём добавления к матрице X_{n+1-k} k нулевых столбцов и увеличения элементов -го столбца полученной матрицы на единицу, т.е. матрицу с размерами $p(n+1-k)\times(n+1)$.

Под матрицей $X_{n+1}^{n+1}, n=1,2,\dots,$ будем понимать матрицу-строку, содержащую n первых нулевых элементов и последний $(n+1)$-й элемент, равный единице.

Определение 1.2.2. Под числом $p(n,k), 1\le k\le n$ будем понимать число таких строк матрицы X_n, каждая из которых содержит $k-1$ первых нулевых элементов и k-ый элемент не меньший единицы. В частности, под $p(n,1)$ будем понимать число строк матрицы X_n, первые элементы которых не меньше единицы. Если же $k=n$, то $p(n,n)=1$.

Отметим, что $p(n,k) =$

$$\begin{cases} 0, если\ k=\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]+1,\dots,n-2 \\ 1, если\ k=n \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Из (1.2.2) следует, что строки матрицы $\mathrm{X_n}$, кроме последней строки этой матрицы, могут содержать не более $\left[\frac{\mathrm{n}}{2}\right]-1$ нулевых элементов. Последняя строка матрицы X_n содержит $n-1$ первых нулевых элементов и последний n -ый элемент, равный единице.

Отметим, что строка матрицы X_n, содержащая $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ первых нулевых элементов, является предпоследней и

$$p\left(n,\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)=1.$$

Если число n четное, то за первыми $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ нулевыми элементами будет следовать 2 –

единственный отличный от нуля элемент, содержащийся в этой строке. Если же число n нечетное, то за нулевыми элементами будут следовать две единицы.

Число строк, содержащихся в матрице X_n, определяется по формуле:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} p(n,k) + 1 \qquad (1.2.3)$$

т.е. формула (1.2.3) позволяет находить значение функции $p(n)$ при любом натуральном n.

Пусть известны матрицы $X_1, X_2, \dots, X_n$. Для нахождения матрицы X_{n+1} нужно:

1. Найти матрицы X_{n+1}^k, $k = 1,2, \dots \left[\frac{n+1}{2}\right]$.
2. Взять матрицу X_{n+1}^1, т.е. взять $p(n)$ строк матрицы X_{n+1}^1.
3. К строкам матрицы X_{n+1}^1 добавить $p(n+1, 2)$ последних строк матрицы X_{n+1}^2, имеющих первый элемент ноль, а второй элемент не меньший единицы. Строки матрицы X_{n+1}^2 добавляются в том порядке, в котором они входят в матрицу X_{n+1}^2. Процесс добавления строк продолжается до матрицы $X_{n+1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$.
4. К строкам полученной матрицы добавить матрицу-строку X_{n+1}^{n+1}, т.е. строку, содержащую n первых нулевых элементов и последний $(n+1)$-й элемент равный единице.

Рассмотрим четыре простых примера:

Пример 1.

Найти матрицу ЦНР уравнения

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

Решение.

Примем во внимание, что решением уравнения $x_1 = 1$ является одноэлементная матрица $X_1 = (1)$, найдем матрицу $X_2^1 = (2 \quad 0)$ и $X_2^2 = (0 \quad 1)$. Присоединяя к строке матрицы X_2^1 строку матрицы X_2^2, получим матрицу ЦНР рассматриваемого уравнения

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

Зная матрицы X_1, X_2 найти матрицу X_3, являющуюся матрицей ЦНР уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$.

Решение.

Находим матрицу $X_3^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

и, присоединяя к ее строкам матрицу-строку X_3^3, находим матрицу $X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 3

Зная матрицы X_1, X_2, X_3 найти матрицу X_4, являющуюся матрицей ЦНР уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4$

Решение.

Находим матрицы

$$X_4^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_4^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Берем $p(4,1) = p(3) = 3$ строк матрицы X_4^1, т.е. все строки этой матрицы. Присоединяем к этим строкам $p(4,2) = 1$ строк матрицы X_4^2, т.е. последнюю строку этой матрицы и матрицу-строку X_4^4, получим матрицу

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

Зная матрицы X_1, X_2, X_3, X_4 найти матрицу X_5, являющуюся матрицей ЦНР уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5$.

Решение.

Находим матрицы

$$X_5^1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_5^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Берем $p(5,1) = p(4) = 5$ строк матрицы X_5^1, т.е. все строки этой матрицы. Присоединяя к ним $p(5,2) = 1$ последних строк матрицы X_5^2, и матрицу-строку X_5^5, получим матрицу

$$X_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§3. Производящая матрица матрицы ЦНР $\mathbf{X_n}$.

Во втором параграфе этой главы были введены в рассмотрение числа $p(m,k)$, определяющие число строк матрицы ЦНР X_m, содержащих $k-1$ первых нулевых элементов и k -й элемент, не меньший единицы. Полагая $m=1,2,\dots,n$, из чисел $p(m,k)$ составим квадратную матрицу n -го порядка:

$$P_n = \begin{pmatrix} p(1,1) & 0 \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots. & .. & 0 \\ p(2,1) & p(2,2) & 0 & \dots\dots\dots\dots..\dots\dots\dots\dots\dots\dots. & & 0 \\ p(3,1) & p(3,2) & p(3,3) & 0 \ \dots\dots..\dots\dots & \dots.. & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ p(i,1) & p(i,2) & \dots.. & \dots\dots\dots p(i,i) \ 0 \dots\dots\dots. & & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ p(n,1) & p(n,2) & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots. & & p(n,n) \end{pmatrix}$$

(1.3.1)

Если известна матрица P_n, то для того, чтобы найти матрицу P_{n+1}, нужно воспользоваться следующими двумя соотношениями

$$p(m,k) = \sum_{i=k}^{m-k} p(m-k,i) \qquad (1.3.2)$$

и

$$p(m,k) = \begin{bmatrix} 0, \text{если } \frac{m}{2} < k < m \\ 1, \text{если } k = m \end{bmatrix} \qquad (1.3.3)$$

Введенную в рассмотрение матрицу P_n назовем производящей матрицей матрицы ЦНР X_n. Заметим, что сумма элементов i -ой строки матрицы $P_n, i = 1,2,\dots,n,$ дает значение функции $p(i)$ и, введенная в рассмотрение производящая матрица позволяет вычислить точно значение функции $p(n)$для любого натурального n.

Пример 1.

Введя в рассмотрение производящую матрицу P_6, найти матрицу ЦНР X_6.

Решение.

Найдем производящую матрицу P_6. Примем во внимание, что $p(1,1) = 1$ и, воспользовавшись соотношениями (1.3.2) и (1.3.3), найдем:

1. Элементы второй строки производящей матрицы

$\mathrm{p}(2,1) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{1} \mathrm{p}(1,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(1,1) = 1,$

$\mathrm{p}(2,2) = 1.$

2. Элементы третьей строки производящей матрицы

$$p(3,1) = \sum_{i=1}^{2} p(2,i) = p(2,1) + p(2,2) = 1 + 1 = 2$$

$\mathrm{p}(3,2) = 0, \mathrm{p}(3,3) = 1.$

3. Элементы четвертой строки производящей матрицы

$$\mathrm{p}(4,1) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{3} \mathrm{p}(3,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(3,1) + \mathrm{p}(3,2) +$$

$$+\mathrm{p}(3,3) = 2 + 0 + 1 = 3$$

$$\mathrm{p}(4,2) = \sum_{\mathrm{i}=2}^{2} \mathrm{p}(2,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(2,2) = 1$$

$\mathrm{p}(4,3) = 0, \mathrm{p}(4,4) = 1.$

4. Элементы пятой строки производящей матрицы

$$\mathrm{p}(5,1) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \mathrm{p}(4,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(4,1) + \mathrm{p}(4,2) +$$

$$+\mathrm{p}(4,3) + \mathrm{p}(4,4) = 3 + 1 + 0 + 1 = 5$$

$$\mathrm{p}(5,2) = \sum_{\mathrm{i}=2}^{3} \mathrm{p}(3,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(3,2) + \mathrm{p}(3,3) == 0 + 1$$

$$= 1,$$

$$\mathrm{p}(5,3) = 0, \mathrm{p}(5,4) = 0, \mathrm{p}(5,5) = 1.$$

5. Элементы шестой строки производящей матрицы

$$p(6,1) = \sum_{i=1}^{5} p(5,i) == p(5,1) +$$

$$+p(5,2) + p(5,3) + p(5,4) +$$

$$+\mathrm{p}(5,5) = 5 + 1 + 0 + 0 + 1 = 7$$

$$\mathrm{p}(6,2) = \sum_{\mathrm{i}=2}^{4} \mathrm{p}(4,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(4,2) + \mathrm{p}(4,3) +$$

$$+\mathrm{p}(4,4) = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\mathrm{p}(6,3) = \sum_{\mathrm{i}=3}^{3} \mathrm{p}(3,\mathrm{i}) = \mathrm{p}(3,3) = 1,$$

$$\mathrm{p}(6,4) = 0, \mathrm{p}(6,5) = 0, \mathrm{p}(6,6) = 1.$$

Найдя элементы строк производящей матрицы P_6, запишем саму матрицу

$$P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В предыдущем параграфе были найдены матрицы

$$X_1 = (1), X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Зная эти матрицы, найдем матрицы

$$X_6^1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Воспользовавшись последней шестой строкой производящей матрицы P_6, возьмем все семь строк матрицы X_6^1, к ним присоединим две последние строки матрицы X_6^2, затем последнюю строку матрицы X_6^3 и матрицу-строку X_6^6. В результате получим матрицу

$$X_6 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число строк матрицы ЦНР X_6 равно сумме элементов последней шестой строки производящей матрицы P_6, $p(6) = 11$.

Если найдены матрицы ЦНР $X_1, X_2, \dots, X_n$ и производящая матрица P_{n+1}, то для нахождения матрицы ЦНР X_{n+1} нужно:

1. Найти матрицы
$$\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}^{1}, \mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}^{2}, \dots, \mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}^{\left[\frac{\mathrm{n+1}}{2}\right]}.$$
2. Воспользовавшись отличными от нуля элементами последней строки производящей матрицы $\mathrm{P}_{\mathrm{n+1}}$, взять $\mathrm{p}(\mathrm{n}+1,1)$ строк матрицы $\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}^{1}$, т.е. все строки этой матрицы, к ним присоединить $\mathrm{p}(\mathrm{n}+1,2)$ последних строк матрицы $\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}^{2}$ и продолжать так далее, закончив процесс построения матрицы ЦНР $\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}$ присоединением матрицы-строки $\mathrm{X}_{\mathrm{n+1}}^{\mathrm{n+1}}$.

§4. Характеристическая матрица матрицы ЦНР $\mathbf{X_{n+1}}$.

В этом параграфе вводится в рассмотрение характеристическая матрица матрицы ЦНР X_{n+1}. Дадим следующее

Определение 1.4.1. Пусть известна матрица ЦНР X_{n+1}. Матрицу, полученную из матрицы X_{n+1} путем замены отличных от нуля элементов столбцов этой матрицы натуральными числами, назовем характеристической матрицей матрицы ЦНР X_{n+1}.

Из этого определения следует, что размеры матрицы ЦНР X_{n+1} и характеристической матрицы совпадают и обе матрицы имеют одинаковые нулевые элементы. Введенную в рассмотрение матрицу обозначим $\aleph_{n+1}$. Примем во внимание, что матрицы $X_{n+1}^1, X_{n+1}^2, \dots, X_{n+1}^n, X_{n+1}^{n+1}$ (1.4.1)

являются матрицами ЦНР уравнений, входящих в набор (1.1.2) и строки этих матриц без повторений содержит матрица X_{n+1}. Так же, как и матрица X_{n+1}, ни одна из матриц, входящих в последовательность (1.4.1) не содержит повторяющихся строк. Элементами матрицы $\aleph_{n+1}$ так же, как и матрицы X_{n+1}, являются целые неотрицательные числа. Отличный от нуля элемент –й строки матрицы $\aleph_{n+1}$, $\aleph_{ij}$, $1 \le i \le p(n+1), 1 \le j \le n+1$, определяет, под каким номером i–ая строка матрицы X_{n+1} входит в матрицу X_{n+1}^j. Если же элемент i–ой строки матрицы X_{n+1} $x_{ij} = 0$, то i–ая строка матрицы X_{n+1} не входит в матрицу X_{n+1}^j. Если i–ая строка матрицы X_{n+1} содержит k отличных от нуля элементов j_1-й, j_2-й, и т.д., j_k-й, то согласно теореме 1.1.3 эта строка будет представлять собою решение k уравнений, входящих в набор (1.1.2), а именно, j_1-го, j_2-го, и т.д., и, наконец, j_k -го, и войдет в матрицы $X_{n+1}^{j_1}, X_{n+1}^{j_2}, \dots, X_{n+1}^{j_k}$, а j_1-й, j_2-й, и т.д., j_n-й элементы i –ой строки характеристической матрицы $\aleph_{n+1}$ определят, под какими номерами рассматриваемая i–ая строка войдет в эти матрицы.

Пример 1.

Воспользовавшись матрицами ЦНР X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, найденными в предыдущем параграфе, найти матрицы $X_6^1, X_6^2, , X_6^3, X_6^4, X_6^5$. Зная матрицу X_6, найденную в предыдущем параграфе, найти характеристическую матрицу $\aleph_6$ и убедиться, что строки этой матрицы определяют номера строк матриц $X_6^1, X_6^2, , X_6^3, X_6^4, X_6^5$, с которыми совпадают строки матрицы X_6.

Решение.

1. Принимая во внимание, что

$$X_1 = (1), X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

найдем:

$$X_6^1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Для матрицы X_6 найдем характеристическую матрицу $\aleph_6$:

$$X_6 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\aleph_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Первая строка характеристической матрицы $\aleph_6$ показывает, что первая строка матрицы ЦНР X_6 является первой строкой матрицы ЦНР X_6^1.
4. Вторая строка характеристической матрицы $\aleph_6$ показывает, что вторая строка матрицы ЦНР X_6 является второй строкой матрицы ЦНР X_6^1 и первой строкой матрицы ЦНР X_6^2.
5. Шестая строка характеристической матрицы $\aleph_6$ показывает, что шестая строка матрицы ЦНР X_6 является шестой строкой матрицы ЦНР X_6^1, третьей строкой матрицы ЦНР X_6^2 и второй строкой матрицы ЦНР X_6^3.

Мы рассмотрели первую, вторую и шестую строки матрицы ЦНР X_6. Совершенно аналогично могут быть рассмотрены и остальные строки этой матрицы.

Отметим, что первый отличный от нуля элементk -го столбца характеристической матрицы $\aleph_{n+1}$ равен единице, а последний отличный от нуля элемент этого столбца равен $\mathrm{p}(\mathrm{n}+1-\mathrm{k}), \mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{n}+1$. Предпоследний -й столбец характеристической матрицы $\aleph_{n+1}$ содержит единственный отличный от нуля элемент, равный единице, $\mathrm{p}(1)=1$, а $(\mathrm{n}+1)$-й столбец этой матрицы содержит все нулевые элементы, кроме последнего, равного единице (мы считаем, что $\mathrm{p}(0) = 1$).

Закономерности, которым подчинены строки и столбцы матриц $\mathrm{X}_{\mathrm{n}+1}$ и $\aleph_{\mathrm{n}+1}$ и очевидные при небольших значениях $\mathrm{n}\,(\mathrm{n} \leq 10)$ сохранятся для любых натуральных n, поскольку при любом натуральном n матрицы $\mathrm{X}_{\mathrm{n}+1}$ и $\aleph_{\mathrm{n}+1}$ строятся с использованием одних и тех же простых алгоритмов.

Заканчивая первую главу, отметим, что рассматривая задачу отыскания целых неотрицательных решений (ЦНР) уравнения (1.0.1), мы смогли увидеть некоторые присущие этим решениям закономерности. Для некоторых серьезных исследователей, открытые ими законы казались им удивительными, и они понимали, что эти законы сами по себе, без замысла Божия о них, возникнуть не могли бы. Например, всемирно известный шведский ученый Карл Линней свой фундаментальный труд о растениях закончил словами: «Воистину есть Бог, великий, вечный, без которого ничто не может существовать».

Глава 2

О задаче дифференцирования суперпозиции функций.

В этой главе рассматривается функция

$$\theta(z_1, z_2, \dots, z_m)$$

голоморфная в окрестности точки $(z_1, z_1, \dots, z_m)$.Ее аргументы – функции комплексной переменной t голоморфные в окрестности точки t. Доказывается теорема об -кратном дифференцировании функции θ по t и рассматриваются ее различные обобщения. Вводятся в рассмотрение линейные дифференциальные операторы

$$D_k^1 = \frac{d^{k+1}z_1(t)}{dt^{k+1}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{d^{k+1}z_2(t)}{dt^{k+1}}\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \frac{d^{k+1}z_m(t)}{dt^{k+1}}\frac{\partial}{\partial z_m}, k = 0,1,2, \dots \quad (2.0.1)$$

Результат -кратного дифференцирования по t рассматриваемой суперпозиции функций записывается в операторной форме. Доказательство теоремы использует свойства ЦНР уравнения

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n$$

и, прежде всего, опирается на теорему 1.1.3.

§1. Дифференцирование суперпозиции функций многих переменных.

Подействовав на голоморфную функцию

$$\theta[z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]$$

линейным дифференциальным оператором $D^1_{k_1}$, определенным согласно (2.0.1), найдем:

$$D^1_{k_1}\theta = \frac{d^{k_1+1}z_1(t)}{dt^{k_1+1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_1} + \frac{d^{k_1+1}z_2(t)}{dt^{k_1+1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_2} + \cdots + \frac{d^{k_1+1}z_m(t)}{dt^{k_1+1}}\frac{\partial\theta}{\partial z_m}, \tag{2.1.1}$$

В (2.1.1) аргументы функции θ не записаны. Далее также аргументы этой функции чаще всего мы записывать не будем. Все производные функции θ находятся в точке $(z_1, z_1, \dots, z_m)$, Принимая во внимание, что производные голоморфной функции являются голоморфными функциями, подействуем на функцию $D^1_{k_1}\theta$ оператором $D^1_{k_2}$, и полученную функцию обозначим $D^2_{k_1k_2}$,

$$\mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_2}\left(\mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_1}\theta\right) = \mathrm{D}^2_{\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2}\theta.$$

Продолжая далее, найдем:

$$\mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_3}\left(\mathrm{D}^2_{\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2}\theta\right) = \mathrm{D}^3_{\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2\mathrm{k}_3}\theta$$

……………………………………………………….

$$\mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_\nu}\left(\mathrm{D}^{\nu-1}_{\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2\dots\mathrm{k}_{\nu-1}}\theta\right) = \mathrm{D}^\nu_{\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2\dots\mathrm{k}_\nu}\theta \tag{2.1.2}$$

Если $\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 = \cdots = \mathrm{k}_\nu = k$, то будем писать $\mathrm{D}^\nu_{\mathrm{k}}\theta$. Заметим, что операторы $\mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_1}, \mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_2}, \dots, \mathrm{D}^1_{\mathrm{k}_\nu}$, перестановочные. Далее будут рассматриваться числа $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \dots, \mathrm{k}_\mathrm{v}$, для которых выполняется условие

$$\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2 + \dots + \mathrm{k}_\mathrm{v} \le n + 1, \qquad (2.1.3)$$

где $n+1$ – порядок рассматриваемой производной функции

$$\theta[z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)] \text{ по } t.$$

Покажем, что

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} =$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} D_n^1 & D_0^1 & \frac{n}{1}D_1^1 & \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_2^1 & \dots\dots & \frac{n}{1}D_{n-1}^1 \\ D_{n-1}^1 & -1 & D_0^1 & \frac{n-1}{1}D_1^1 & \dots\dots & \frac{n-1}{1}D_{n-2}^1 \\ D_{n-2}^1 & 0 & -1 & D_0^1 & \dots\dots & \frac{n-2}{1}D_{n-3}^1 \\ \dots\dots\dots.. & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots.. \\ D_0^1 & 0 & 0 & 0\dots\dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \theta. \qquad (2.1.4)$$

Раскрывая этот определитель, получим:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} D_n^1 + D_{n-1\,0}^2 & 0 & \frac{n}{1}D_1^1 + D_{0\,0}^2 & \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_2^1 + \frac{n-1}{1}D_{1\,0}^2 & \dots & \frac{n}{1}D_{n-1}^1 + \frac{n-1}{1}D_{n-2\,0}^2 \\ D_{n-1}^1 & -1 & D_0^1 & \frac{n-1}{1}D_1^1 & \dots & \frac{n-1}{1}D_{n-2}^1 \\ D_{n-2}^1 & 0 & -1 & D_0^1 & \dots & \frac{n-2}{1}D_{n-3}^1 \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ D_0^1 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \theta$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} D_n^1 & \frac{n}{1}D_1^1 & \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_2^1 & \dots & \dots & \frac{n}{1}D_{n-1}^1 \\ D_{n-2}^1 & -1 & D_0^1 & \dots & \dots & \frac{n-2}{1}D_{n-3}^1 \\ \dots\dots\dots.. & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots.. \\ D_0^1 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \theta$$

$$+D_0^1(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} D_{n-1}^1 & D_0^1 & \frac{n-1}{1}D_1^1 & \dots & \frac{n-1}{1}D_{n-2}^1 \\ D_{n-2}^1 & -1 & D_0^1 & \dots & \frac{n-2}{1}D_{n-3}^1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots.. \\ D_0^1 & 0 & 0\dots & 0 & -1 \end{vmatrix}\theta =$$

$$= (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} D_n^1 & \frac{n}{1}D_1^1 & \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_2^1 & \dots & \dots & \frac{n}{1}D_{n-1}^1 \\ D_{n-2}^1 & -1 & D_0^1 & \dots & \dots & \frac{n-2}{1}D_{n-3}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_0^1 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & -1 \end{vmatrix}\theta +$$

$+D_0^1\frac{d^n\theta}{dt^n}.$

Продолжая совершенно аналогично далее, найдем:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k^1\frac{d^{n-k}\theta}{dt^{n-k}}, \qquad (2.1.5)$$

где $\binom{n}{k}$ – биноминальные коэффициенты.

Заметим, что применяя формулу Лейбница, также придем к формуле (2.1.5). Имеем:

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}\theta}{\mathrm{d}t^{n+1}} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\frac{\partial\theta}{\partial z_1}\cdot\frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\theta}{\partial z_2}\cdot\frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} + \dots + \frac{\partial\theta}{\partial z_m}\cdot\frac{\mathrm{d}z_m(t)}{\mathrm{d}t}\right].$$

Воспользовавшись формулой Лейбница, последнее выражение перепишем так:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z_1}\right)\cdot\frac{d^{k+1}z_1(t)}{dt^{k+1}} + \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z_2}\right)\cdot\frac{d^{k+1}z_2(t)}{dt^{k+1}} + \dots + \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z_m}\right)\cdot\frac{d^{k+1}z_m(t)}{dt^{k+1}}\right]$$

или

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{d^{n-k}\theta}{dt^{n-k}}\right) \cdot \frac{d^{k+1}z_1(t)}{dt^{k+1}} + \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{d^{n-k}\theta}{dt^{n-k}}\right) \cdot \frac{d^{k+1}z_2(t)}{dt^{k+1}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_m}\left(\frac{d^{n-k}\theta}{dt^{n-k}}\right) \cdot \frac{d^{k+1}z_m(t)}{dt^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k^1 \frac{d^{n-k}\theta}{dt^{n-k}},$$

т.е. формула (2.1.5) справедлива, а значит, справедлива и формула (2.1.4).

Рассмотрению основной теоремы этого параграфа предпошлем четыре простых примера.

Пример 1.

Найти $\frac{d\theta}{dt}$

Решение:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial z_1} \cdot \frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial z_2} \cdot \frac{dz_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial\theta}{\partial z_m} \cdot \frac{dz_m}{dt}$$

или в операторной форме

$\frac{d\theta}{dt} = D_0^1\theta$, что можно записать так:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum_{X_1} \frac{1!}{x_1!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \theta$$

Пример 2.

Найти $\frac{d^2\theta}{dt^2}$

Решение:

Воспользовавшись формулой (2.1.5), найдем:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} D_k^1 \frac{d^{1-k}\theta}{dt^{1-k}} = \binom{1}{0} D_0^1 \frac{d\theta}{dt} + \binom{1}{1} D_1^1 \theta =$
$D_0^1(D_0^1\theta) + D_1^1\theta = (D_0^1)^2\theta + D_1^1\theta = \frac{2!}{2!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^2 \theta +$
$\frac{2!}{0!1!}\frac{D_1^1}{2!}\theta$, т.е.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum_{X_2} \frac{2!}{x_1!x_2!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \theta,$$

где суммирование ведется по строкам матрицы X_2.

Пример 3.

Найти $\frac{d^3\theta}{dt^3}$

Решение:

Прежде чем находить производную $\frac{d^3\theta}{dt^3}$, отметим, что уравнение (1.1.1), рассматриваемое в первой главе, при $n = 3$ будет иметь вид:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \qquad (2.1.6)$$

а набор уравнений (1.1.2) запишется так:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \cdot (x_1 + 1) + 2x_2 = 3 \\ 1 \cdot x_1 + 2(x_2 + 1) = 3 \\ \quad 3 \cdot (x_3 + 1) = 3 \end{array}\right. \qquad (2.1.7)$$

Матрицы $X_3^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X_3^2 = (1 \quad 1 \quad 0), X_3^3 = (0 \quad 0 \quad 1)$$

будут матрицы ЦНР соответственно первого, второго и третьего уравнений, входящих в набор (2.1.7).

Принимая во внимание формулу (2.1.5), найдем производную функции θ по t третьего порядка

$\frac{d^3\theta}{dt^3} = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} D_k^1 \frac{d^{2-k}\theta}{dt^{2-k}} = \binom{2}{0} D_0^1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \binom{2}{1} D_1^1 \frac{d\theta}{dt} + \binom{2}{2} D_2^1 \theta = D_0^1 \sum_{X_2} \frac{2!}{x_1! x_2!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \theta +$
$2D_1^1 \sum_{X_1} \frac{1!}{x_1} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \theta + D_2^1 \theta = \sum_{X_2} \frac{2!(x_1+1)}{x_1!(x_1+1)x_2!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1+1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \theta + \sum_{X_1} \frac{2!\cdot 2}{x_1!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta + 2! \cdot 3 \cdot \frac{D_2^1}{3!} \theta =$
$\sum_{X_3^1} \frac{2! x_1}{x_1! x_2! x_3!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \theta +$
$\sum_{X_3^2} \frac{2! 2}{x_1! x_2! x_3!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \theta +$
$\sum_{X_3^3} \frac{2! 3}{x_1! x_2! x_3!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \theta = \frac{2! 3}{3! 0! 0!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{3} \theta +$
$\frac{2! 1}{1! 1! 0!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta + \frac{2! 2}{1! 1! 0!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta +$
$\frac{2! 3}{0! 0! 1!} \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{1} \theta = \frac{2! 1 \cdot 3}{3! 0! 0!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{3} \theta + \frac{2!(1\cdot 1 + 2\cdot 1)}{1! 1! 0!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta + \frac{2! 3 \cdot 1}{0! 0! 1!} \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{1} \theta.$

Мы показали, что после приведения подобных множитель 2! будет умножаться на сумму, которая получается в результате подстановки элементов матрицы

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в левую часть уравнения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$.

Полученный результат запишем в окончательном виде:

$$\frac{d^3\theta}{dt^3} = \sum_{X_3} \frac{3!}{x_1! \, x_2! \, x_3!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \theta$$

Пример 4.

Найти $\frac{d^4\theta}{dt^4}$

Решение:

Находя производную функции θ по t четвертого порядка, покажем, что при переходе от $n = 3$ к $n = 4$ сохраняются все закономерности, отмеченные при рассмотрении предыдущего примера.

Воспользовавшись формулой (2.1.5), найдем:

$$\frac{d^4\theta}{dt^4} = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} D_k^1 \frac{d^{3-k}}{dt^{3-k}} = \binom{3}{0} D_0^1 \frac{d^3\theta}{dt^3} + \binom{3}{1} D_1^1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \binom{3}{2} D_2^1 \frac{d\theta}{dt} + \binom{3}{3} D_3^1\theta =$$
$$D_0^1 \sum_{X_3} \frac{3!}{x_1!x_2!x_3!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \theta +$$
$$3D_1^1 \sum_{X_2} \frac{2!}{x_1!x_2!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \theta + 3D_2^1 \sum_{X_1} \frac{1!}{x_1!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \theta +$$
$$D_3^1\theta = \sum_{X_3} \frac{3!(x_1+1)}{x_1!(x_1+1)x_2!x_3!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1+1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \theta +$$
$$\sum_{X_2} \frac{2!3(x_2+1)\cdot 2}{x_1!x_2!(x_2+1)} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2+1} \theta + 3\cdot 3! \left(\frac{D_0^1}{1!}\right) \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right) \theta + 4! \left(\frac{D_3^1}{4!}\right) \theta\ .$$

Принимая во внимание матрицы

$$X_4^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_4^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_4^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

последнюю сумму, определяющую производную четвертого порядка функции θ по t перепишем так:

$$\frac{d^4\theta}{dt^4} = \sum\nolimits_{X_4^1} \frac{3!x_1}{x_1!x_2!x_3!x_4!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \cdot \left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{x_4} \theta + \sum\nolimits_{X_4^2} \frac{3!x_2 \cdot 2}{x_1!x_2!x_3!x_4!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \cdot \left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{x_4} \theta + \sum\nolimits_{X_4^3} \frac{3! \cdot 3}{x_1!x_2!x_3!x_4!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \cdot \left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{x_4} \theta + \sum\nolimits_{X_4^4} \frac{3! \cdot 4 \cdot 1}{x_1!x_2!x_3!x_4!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \cdot \left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{x_4} \theta = \frac{3! \cdot 4}{4!0!0!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{4} + \frac{3! \cdot 2}{2!1!0!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{2} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta + \frac{3! \cdot 1}{1!0!1!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{1} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{1} \theta + \frac{3! \cdot 1 \cdot 2}{2!1!0!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{2} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta + \frac{3! \cdot 2 \cdot 2}{0!2!0!0!}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{2} \theta + \frac{3! \cdot 3}{1!0!1!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{1} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{1} \theta + \frac{3! \cdot 4 \cdot 1}{0!0!0!1!}\left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{1} \theta = \frac{3! \cdot 1 \cdot 4}{4!0!0!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{4} \theta + \frac{3!(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1)}{2!1!0!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{2} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{1} \theta + \frac{3!(1 \cdot 1 + 3 \cdot 1)}{1!0!1!0!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{1} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{1} \theta + \frac{3! \cdot 2 \cdot 2}{0!2!0!0!}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{2} \theta + \frac{3! \cdot 4 \cdot 1}{0!0!0!1!}\left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{1} \theta$$

Видим, что те закономерности, которые имели место при переходе от $n = 2$ к $n = 3$, имеют место и при переходе от $n = 3$ к $n = 4$.

Мы показали, что после приведения подобных множитель 3! умножается на суммы, равные числу 4. Эти суммы представляют собою результаты подстановок элементов строк матрицы

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в левую часть уравнения

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4$$

Переходя от $n = 3$ к $n = 4$, мы показали, что

$$\frac{d^4\theta}{dt^4} = \sum_{X_4} \frac{4!}{x_1!x_2!x_3!x_4!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \cdot \left(\frac{D_2^1}{3!}\right)^{x_3} \cdot \left(\frac{D_3^1}{4!}\right)^{x_4} \theta,$$

где суммирование ведется по строкам матрицы X_4

Перейдем к рассмотрению основной теоремы этого параграфа.

Теорема 2.1.1. Пусть функция $\theta[z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]$ голоморфна в окрестности точки ($z_1, z_2, \dots, z_m$) , а ее аргументы $z_i(t), i = 1,2, \dots, \mathrm{m}$, представляют собою голоморфные функции в окрестности точки t, тогда

$$\frac{d^n\theta}{dt^n} = \sum_{X_n} \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_i!\dots x_n!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \dots \left(\frac{D_{i-1}^1}{i!}\right)^{x_i} \dots \left(\frac{D_{n-1}^1}{n!}\right)^{x_n} \theta, \tag{2.1.8}$$

где $n \in N, D_{i-1}^1, i = 1,2, \dots, n, -$ линейные дифференциальные операторы, определенные согласно (2.0.1), а произведение этих операторов определяется согласно (2.1.2) и суммирование ведется по строкам матрицы X_n.

Доказательство:

При $n = 1$ формула (2.1.8) справедлива. Пусть эта формула справедлива при некотором натуральном n. Покажем, что тогда она будет справедлива и для $n + 1$.

Принимая во внимание формулу (2.1.5), получим:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k^1 \frac{d^{n-k}\theta}{dt^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{0} D_0^1 \sum_{X_n} \frac{n!}{x_1!\,x_2!\dots x_n!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_{n-1}^1}{n!}\right)^{x_n}\theta$$

$$+\binom{n}{1} D_1^1 \sum_{X_{n-1}} \frac{(n-1)!}{x_1!\,x_2!\dots x_{n-1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_{n-2}^1}{(n-1)!}\right)^{x_{n-1}}\theta$$

………………………………………………………………

$$+\binom{n}{k} D_k^1 \sum_{X_{n-k}} \frac{(n-k)!}{x_1!\,x_2!\dots x_{k+1}!\dots x_{n-k}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots$$

$$\left(\frac{D_k^1}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\dots\left(\frac{D_{n-k-1}^1}{(n-k)!}\right)^{x_{n-k}}\theta +$$

………………………………………………………………

$$+\binom{n}{n-1} D_{n-1}^1 \sum\nolimits_{X_1} \frac{1!}{x_1!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\theta + D_n^1\theta.$$

Полученное разложение перепишем так:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \sum_{X_n} \frac{n!\,(x_1+1)}{x_1!\,(x_1+1)x_2!\dots x_n!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1+1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_{n-1}^1}{n!}\right)^{x_n}\theta$$
$$+$$

$$+\sum_{X_{n-1}} \frac{(n-1)!\,n\cdot 2\cdot(x_2+1)}{x_1!\,x_2!\,(x_2+1)\dots x_{n-1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2+1}\dots\left(\frac{D_{n-2}^1}{(n-1)!}\right)^{x_{n-1}}\theta +$$

………………………………………………………………

$$+\sum_{X_{n-k}} \frac{n!\,(k+1)(x_{k+1}+1)}{x_1!\,x_2!\dots x_{k+1}!\,(x_{k+1}+1)\dots x_{n-k}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots$$

$$\left(\frac{D_k^1}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}+1}\dots\dots\left(\frac{D_{n-k-1}^1}{(n-k)!}\right)^{x_{n-k}}\theta +$$

………………………………………………………………

$$+\sum_{X_1}\frac{n!\,n}{x_1!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\frac{D_{n-1}^1}{n!}\theta+n!\,(n+1)\frac{D_n^1}{(n+1)!}\theta=$$

$$=\sum_{X_{n+1}^1}\frac{n!\,x_1}{x_1!\,x_2!\dots x_{n+1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_n^1}{(n+1)!}\right)^{x_{n+1}}\theta$$

$$+\sum_{X_{n+1}^2}\frac{n!\cdot 2\cdot x_2}{x_1!\,x_2!\dots x_{n+1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_n^1}{(n+1)!}\right)^{x_{n+1}}\theta+$$

…………………………………………………………….

$$+\sum_{X_{n+1}^k}\frac{n!\cdot(k+1)\cdot x_{k+1}}{x_1!\,x_2!\dots x_{n+1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots$$

$$\dots\left(\frac{D_k^1}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\dots\left(\frac{D_n^1}{(n+1)!}\right)^{x_{n+1}}\theta+$$

…………………………………………………………….

$$+\sum_{X_{n+1}^n}\frac{n!\cdot n\cdot x_n}{x_1!\,x_2!\dots x_{n+1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots$$

$$\dots\left(\frac{D_{n-1}^1}{n!}\right)^{x_n}\left(\frac{D_n^1}{(n+1)!}\right)^{x_{n+1}}\theta$$

$$+\sum_{X_{n+1}^{n+1}}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot x_{n+1}}{x_1!\,x_2!\dots x_{n+1}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_n^1}{(n+1)!}\right)^{x_{n+1}}\theta$$

Пусть i -я строка, входящая в матрицу X_{n+1} содержит ν отличных от нуля элементов. Тогда согласно теореме 1. 1. 3, набор (1. 1. 2) будет содержать ν уравнений, в матрицы ЦНР которых входит рассматриваемая i -я строка. В результате суммирования по рассматриваемой i -ой строке, содержащейся в ν матрицах, получим ν слагаемых, которые будут отличаться только двумя последними сомножителями k и x_k, $1 \leq k \leq n+1$, входящими в числитель дроби, стоящей перед произведением степеней операторов. Пусть $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_V}$, где k_j ,

$1 \leq j \leq n+1$, номера столбцов , в которые входят рассматриваемые элементы $i-$ой строки матрицы X_{n+1}. Для того , чтобы рассматриваемая $i-$ ая строка была решением уравнения

$x_1 + 2x_2 + \dots + (n+1)x_{n+1} = n+1,$ должно выполняться условие

$k_1 x_{k_1} + k_2\, x_{k_2} + \dots + k_V\, x_{k_V} = n+1.$

Принимая это во внимание , после сложения ν слагаемых, о которых идёт речь, числитель дроби будет иметь вид $n!\,(n+1)$, а знаменатель останется неизменным.

Суммы, которые умножаются на множитель n ! получаются в результате подстановок решений, определённых строками матрицы X_{n+1} , в левую часть рассматриваемого уравнения с $n+1$ неизвестными. Каждая из этих сумм равна $n+1$.

Выполнив приведение подобных, мы получим окончательный результат:

$$\frac{d^{n+1}\theta}{dt^{n+1}} = \sum_{X_{n+1}} \frac{(n+1)!}{x_1! x_2! \dots x_{n+1}!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \dots \left(\frac{D_n^1}{(n+1)!}\right)^{x_{n+1}} \theta,$$

где суммирование ведется по строкам матрицы X_{n+1}.

Важным частным случаем формулы (2.1.8) является случай, когда функция θ зависит не от m аргументов, а от одного аргумента $z(t)$ и представляет собою суперпозицию функций $\theta(z(t))$. Этот случай был рассмотрен французским математиком Faá de Bruno (см [58]). В этом случае оператор D_k^1, определённый согласно (2.0.1) будет иметь вид:

$$D_k^1 = \frac{d^{k+1}z(t)}{dt^{k+1}}\frac{d}{dz}, k = 0,1,2,\dots$$

и формула (2.1.8) запишется так:

$$\frac{d^n\theta(z(t))}{dt^n} = \sum_{X_n}\frac{n!}{x_1!\,x_2!\dots x_j!\dots x_n!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\frac{d}{dz}\right)^{x_2}\dots$$

$$\dots\left(\frac{1}{j!}\frac{d^jz}{dt^j}\frac{d}{dz}\right)^{x_j}\dots\left(\frac{1}{n!}\frac{d^nz}{dt^n}\frac{d}{dz}\right)^{x_n}\theta(z) =$$

$$= \sum_{X_n}\frac{n!}{x_1!\,x_2!\dots x_j!\dots x_n!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^{x_2}\dots$$

$$\dots\left(\frac{1}{j!}\frac{d^jz}{dt^j}\right)^{x_j}\dots\left(\frac{1}{n!}\frac{d^nz}{dt^n}\right)^{x_n}\frac{d^{S_n}\theta(z)}{dz^{S_n}},$$

где S_n – сумма элементов той строки матрицы X_n, по которой ведется суммирование.

Теорема 2.1.2 (теорема Faá de Bruno). Пусть функция $\theta(z(t))$ голоморфна в окрестности точки z, а её аргумент $z(t)$ представляет собою голоморфную функцию в окрестности точки t, тогда

$$\frac{d^n\theta(z(t))}{dt^n} = \sum\nolimits_{X_n}\frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_j!\dots x_n!}\times$$

$$\left(\frac{1}{1!}\frac{dz(t)}{dt}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{1}{j!}\frac{d^jz(t)}{dt^j}\right)^{x_j}\dots\left(\frac{1}{n!}\frac{d^nz(t)}{dt^n}\right)^{x_n}\times$$

$$\frac{d^{S_n}\theta(z)}{dt^{S_n}} \qquad (2.1.9)$$

где $n\epsilon N$, суммирование ведётся по строкам матрицы X_n, а $S_n = x_1{+}x_2 + \dots + x_j + \dots + x_n$ (2.1.10)

т.е. представляет собою сумму элементов той строки, по которой ведется суммирование.

§2. Обобщение теоремы о дифференцировании суперпозиции функций.

Обобщим доказанную в предыдущем параграфе теорему о дифференцировании суперпозиции функций на случай, когда функция θ явно зависит от независимой переменной t.

Пусть t – комплексная переменная и функции $z_i(t), t = 1,2,\dots,m,$ являются голоморфными функциями в окрестности точки t , а функция $\theta[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]$ является голоморфной в окрестности точки $(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$.

Положим

$$(D^*)^i = \sum_{X_i} \frac{i!}{x_1!\, x_2! \dots x_i!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \dots \left(\frac{D_{i-1}^1}{i!}\right)^{x_i},$$

$$i = 1,2,\dots,n, \tag{2.2.1}$$

тогда оператор

$$\frac{d}{dt} = D^* + D_t, \text{ где } D_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

позволит найти полную производную по t функции $\theta(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Оператор

$$\frac{d^2}{dt^2} = (D^* + D_t)^2$$

определит полную производную второго порядка, а оператор

$$\frac{d^n}{dt^n} = (D^* + D_t)^n$$

определит полную производную по t -го порядка рассматриваемой функции $\theta(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Принимая во внимание, что

$$(D^* + D_t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^*)^k D_t^{n-k} = D_t^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (D^*)^k D_t^{n-k},$$

видим, что будет иметь место

Теорема 2.2.1. Пусть t - комплексная переменная и функции $z_i(t), i = 1,2, \dots, \mathrm{m}$, являются голоморфными функциями в окрестности точки t, а функция $\theta[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]$ является голоморфной в окрестности точки $(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$, тогда

$$\frac{d^n \theta[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]}{dt^n} = \frac{\partial^n \theta[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]}{\partial t^n} + \\ + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sum_{X_k} \frac{k!}{x_1! \dots x_i! \dots x_k!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2} \dots \left(\frac{D_{i-1}^1}{i!}\right)^{x_i} \dots \left(\frac{D_{k-1}^1}{k!}\right)^{x_k} \frac{\partial^{n-k} \theta[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]}{\partial t^{n-k}}, \tag{2.2.2}$$

где операторы $D_i^1, i = 0,1, \dots, n-1$ определяются согласно (2.0.1), а суммирование ведется по строкам матрицы $X_k, k = 1,2, \dots, n$, и при действии операторов D_i^1 , и степеней этих операторов на функцию $\theta[t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)]$ и её частные производные по t, переменная t, не входящая под знак функций $z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)$, играет роль параметра.

Рассмотрим важный частный случай теоремы 2.2.1, когда функция θ зависит от $z(t)$ и независимой переменной t. Пусть $z(t)$ - голоморфная функция в окрестности точки t, а $\theta[t, z(t)]$ – голоморфная функция в окрестности точки (t, z), тогда формула (2.2.2) будет иметь вид:

$$\frac{d^n\theta[t,z(t)]}{dt^n} = \frac{\partial^n\theta[t,z(t)]}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{X_k}\frac{k!}{x_1!x_2!\ldots x_i!\ldots x_k!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\cdot \left(\frac{D_1^1}{2!}\right)^{x_2}\ldots\left(\frac{D_{i-1}^1}{i!}\right)^{x_i}\ldots\left(\frac{D_{k-1}^1}{k!}\right)^{x_k}\frac{\partial^{n-k}\theta[t,z(t)]}{\partial t^{n-k}}$$

Принимая во внимание, что

$$D_i^1 = \frac{d^{i+1}z(t)}{dt^{i+1}}\frac{\partial}{\partial z}, i = 0,1, \ldots, n-1,$$

получим:

$$\frac{d^n\theta[t,z(t)]}{dt^n} = \frac{\partial^n\theta[t,z(t)]}{\partial t^n} + $$

$$+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{X_k}\frac{k!}{x_1!\,x_2!\ldots x_i!\ldots x_k!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_1}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_2}\ldots\left(\frac{1}{i!}\frac{d^iz}{dt^i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_i}\ldots\left(\frac{1}{k!}\frac{d^kz}{dt^k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_k}$$

$$\times\frac{\partial^{n-k}\theta[t,z(t)]}{\partial t^{n-k}} =$$

$$= \frac{\partial^n\theta[t,z(t)]}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{X_k}\frac{k!}{x_1!\,x_2!\ldots x_i!\ldots x_k!}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\right)^{x_1}\cdot\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^{x_2}\ldots\left(\frac{1}{i!}\frac{d^iz}{dt^i}\right)^{x_i}\ldots\left(\frac{1}{k!}\frac{d^kz}{dt^k}\right)^{x_k}$$

$$\times \frac{\partial^{n-k+x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_k}\theta[t,z(t)]}{\partial z^{x_1+x_2+\cdots+x_i+\cdots+x_k}\partial t^{n-k}}.$$

Полагая

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_k = S_k,$$

получим:

$$\frac{d^n\theta[t,z(t)]}{dt^n} = \frac{\partial^n\theta[t,z(t)]}{\partial t^n} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{X_k}\frac{k!}{x_1!\,x_2!\,\dots x_i!\dots x_k!}\cdot\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\right)^{x_1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{1}{i!}\frac{d^iz}{dt^i}\right)^{x_i}\dots\left(\frac{1}{k!}\frac{d^kz}{dt^k}\right)^{x_k}$$

$$\times\frac{\partial^{n-k+S_k}\theta[t,z(t)]}{\partial z^{S_k}\partial t^{n-k}} = \frac{\partial^n\theta[t,z(t)]}{\partial t^n} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{X_k}\frac{n!\,S_k!}{x_1!\,x_2!\,\dots x_i!\dots x_k!}\cdot\frac{1}{S_k!\,(n-k)!}$$

$$\cdot\frac{\partial^{n-k+S_k}\theta[t,z(t)]}{\partial z^{S_k}\partial t^{n-k}}\cdot\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\right)^{x_1}\cdot\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^{x_2}\dots$$

$$\dots\left(\frac{1}{i!}\frac{d^iz}{dt^i}\right)^{x_i}\dots\left(\frac{1}{k!}\frac{d^kz}{dt^k}\right)^{x_k}$$

Сформулируем теорему об -кратном дифференцировании функции $\theta[t,z(t)]$.

Теорема 2.2.2. Пусть t – комплексная переменная и функция $z(t)$ является голоморфной функцией в окрестности точки t, а функция $\theta[t,z(t)]$ является голоморфной в окрестности точки (t,z) тогда

$$\frac{d^n\theta[t,z(t)]}{dt^n}=\frac{\partial^n\theta[t,z(t)]}{\partial t^n}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{X_k}\frac{n!S_k!}{x_1!x_2!\dots x_i!\dots x_k!}\frac{1}{S_k!(n-k)!}\frac{\partial^{n-k+S_k}\theta[t,z(t)]}{\partial z^{S_k}\partial t^{n-k}}\times$$

$$\left(\frac{1}{1!}\frac{dz}{dt}\right)^{x_1}\cdot\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2z}{dt^2}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{1}{i!}\frac{d^iz}{dt^i}\right)^{x_i}\dots\left(\frac{1}{k!}\frac{d^kz}{dt^k}\right)^{x_k}, \qquad (2.2.3)$$

где $n\in N$, суммирование ведётся по строкам матрицы X_k, S_k - сумма элементов той строки матрицы X_k, по которой ведется суммирование, а при отыскании частных производных по z функции $\theta[t,z(t)]$ и от частных производных этой функции по t, переменная t, не входящая под знак функции z играет роль параметра.

§3. Интегральное обобщение теоремы о дифференцировании суперпозиции функций.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^t K[t, \tau, z_1(\tau), \dots., z_m(\tau)]d\tau, \qquad (2.3.1)$$

Интеграл J представляет собою функцию, зависящую от $t, \tau, u\, z_1(\tau), \dots., z_m(\tau)$, где t и τ - комплексные переменные, а $z_i(\tau), i = 1,2, \dots, m$ являются голоморфными функциями в окрестности точки τ.

Пусть функция $K[t, \tau, z_1(\tau), \dots., z_m(\tau)]$ представляет собою голоморфную функцию в окрестности точки $(t, \tau, z_1, \dots., z_m)$.

Положим:

$$\frac{d^n}{dd^n} = (D^* + D_t + D_\tau)^n, n = 1,2, \dots, \qquad (2.3.2)$$

где оператор $(D^*)^p =$

$$\sum_{X_p} \frac{p!}{x_1! x_2! \dots x_k! \dots x_p!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \dots \left(\frac{D_k^1}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}} \dots \left(\frac{D_{p-1}^1}{p!}\right)^{x_p},$$

$p = 1,2, \dots,$

$$D_k^1 = \frac{d^{k+1} z_1(\tau)}{d\tau^{k+1}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{d^{k+1} z_2(\tau)}{d\tau^{k+1}} \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \frac{d^{k+1} z_m(\tau)}{d\tau^{k+1}} \frac{\partial}{\partial z_m}, k = 0,1,2, \dots,$$

а операторы D_t и D_τ - операторы частного дифференцирования соответственно по t и по τ:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Найдем производную n -го порядка по t от интеграла J , определенного согласно (2.3.1). Воспользовавшись результатом, опубликованным в [75] (См. B.Noble, The numerical solution of nonlinear integral equations and related topics. Nonlinear Integral Equations. – Univ. Wis. Press, 1964, p.253), будем иметь:

$$\frac{d^n J}{dt^n} = \int_0^t D_t^n K[t, \tau, z_1(\tau), \ldots., z_m(\tau)] d\tau + \sum_{i=1}^n (D^* + D_t + D_\tau)^{i-1} (D_t^{n-i} K[t, \tau, z_1(\tau), \ldots., z_m(\tau)]), n = 1,2, \tag{2.3.3}$$

После того как в (2.3.3) будет выполнено суммирование по i и выполнены все дифференцирования, следует τ положить t.

Преобразуем формулу (2.3.3). Перепишем эту формулу так:

$$\frac{d^n J}{dt^n} = \int_0^t D_t^n K[t, \tau, z_1(\tau), \ldots., z_m(\tau)] d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (D^*)^{i-1-j} (D_t + D_\tau)^j \cdot$$

$$\cdot (D_t^{n-i} K[t, \tau, z_1(\tau), \ldots., z_m(\tau)]$$

$$= \int_0^t D_t^n K[t, \tau, z_1(\tau), \ldots., z_m(\tau)] d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \sum_{X_{i-1-j}} \frac{(i-1-j)!}{x_1! \ldots x_l! \ldots x_{i-1-j}!} \left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1} \ldots$$

$$\dots\left(\frac{D_{l-1}^1}{l!}\right)^l \dots\left(\frac{D_{i-2-j}^1}{(i-1-j)!}\right)^{x_{i-1-j}} \times$$

$$\times (D_t + D_\tau)^j D_\tau^{n-i} K[t,\tau,z_1(\tau),\dots.,z_m(\tau)], n = 1,2,\dots$$

Сформулируем теорему об -кратном дифференцировании по t рассматриваемого интеграла J, определенного согласно (2.3.1).

Теорема 2.3.1. Пусть t и τ – комплексные переменные, а функции $z_i(\tau), i = 1,2,\dots,m$, представляют собою голоморфные функции в окрестности точки τ и пусть функция $K[t,\tau,z_1(\tau),\dots.,z_m(\tau)]$ представляет собою голоморфную функцию в окрестности точки $(t,\tau,z_1,\dots,z_m,)$. Тогда производная n -го порядка по t интеграла $J = \int_0^t K[t,\tau,z_1(\tau),\dots.,z_m(\tau)]d\tau$ определится по формуле

$$\frac{d^n J}{dt^n} = \int_0^t D_t^n K[t,\tau,z_1(\tau),\dots.,z_m(\tau)]d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\sum_{X_{i-1-j}}\frac{(i-1-j)!}{x_1!\dots x_l!\dots x_{i-1-j}!}\left(\frac{D_0^1}{1!}\right)^{x_1}\dots$$

$$\dots\left(\frac{D_{l-1}^1}{l!}\right)^{x_l} \dots\left(\frac{D_{i-2-j}^1}{(i-1-j)!}\right)^{x_{i-1-j}} \times$$

$$\times (D_t + D_\tau)^j D_t^{n-i} K[t,\tau,z_1(\tau),\dots.,z_m(\tau)], n = 1,2,\dots, \qquad (2.3.4)$$

где суммирование ведётся по i, по j и строкам матриц X_{i-1-j}.

После выполнения всех операций, содержащихся в формуле (2.3.4), во всех слагаемых, кроме первого, нужно положить τ равным t.

Рассмотрим важный частный случай теоремы 2.3.1, когда подынтегральная функция зависит от τ, t и $z(\tau)$. Принимая во внимание определение линейного дифференциального оператора D_k^1 (см. (2.0.1)), в рассматриваемом нами частном случае будем иметь:

$$D_{l-1}^1 = \frac{d^l z(\tau)}{d\tau^l}\frac{\partial}{\partial z}, l = 1,2, \dots,$$

и формула (2.3.4) n-кратного дифференцирования по t интеграла

$$J_1 = \int_0^t K[t, \tau, z(\tau)]d\tau \qquad (2.3.5)$$

запишется так:

$$\frac{d^n J_1}{dt^n} = \int\limits_0^t D_t^n K[t, \tau, z(\tau)]d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\sum_{X_{i-1-j}}\frac{(i-1-j)!}{x_1!\dots x_l!\dots x_{i-1-j}!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dz(\tau)}{d\tau}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_1}\dots$$

$$\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l z(\tau)}{d\tau^l}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_l}\dots\left(\frac{1}{(i-1-j)!}\frac{d^{i-1-j}z(\tau)}{d\tau^{i-1-j}}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{x_{i-1-j}}\times$$

$$(D_\text{т} + D_t)^j \; D_t^{n-i} K[t, \tau, z(\tau)] =$$

$$= \int\limits_0^t D_t^n K[t, \tau, z(\tau)]d\tau$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\sum_{X_{i-1-j}}\frac{(i-1-j)!}{x_1!\dots x_l!\dots x_{i-1-j}!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dz(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\dots$$

$$\dots\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l z(\tau)}{d\tau^l}\right)^{x_l}\dots\left(\frac{1}{(i-1-j)!}\frac{d^{i-1-j}z(\tau)}{d\tau^{i-1-j}}\right)^{x_{i-1-j}}\dots\times$$

$$\dots\times\frac{\partial^{S_{i-1-j,k}}}{\partial z^{S_{i-1-j,k}}}(D_\tau+D_t)^j D_t^{n-i}K[t,\tau,z(\tau)], n=1,2,\dots.$$

где $S_{i-1-j,k}$ – сумма элементов -й строки матрицы X_{i-1-j}.

Сформулируем теорему об -кратном дифференцировании по t интеграла J_1, определенного согласно (2.3.5).

Теорема 2.3.2. Пусть t и τ – комплексные переменные и функция $z(\tau)$ является голоморфной функцией в окрестности точки τ , а функция $K[t,\tau,z(\tau)]$ представляет собою голоморфную функцию в окрестности точки (t,τ,z) . Тогда производная n -го порядка по t интеграла $J_1=\int_0^t K[t,\tau,z(\tau)]d\tau$

определится по формуле

$$\frac{d^n J_1}{dt^n}=\int_0^t D_t^n K[t,\tau,z(\tau)]d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\sum_{X_{i-1-j}}\frac{(i-1-j)!}{x_1!\dots x_l!\dots x_{i-1-j}!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dz(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\dots$$

$$\dots\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l z(\tau)}{d\tau^l}\right)^{x_l}\dots\left(\frac{1}{(i-1-j)!}\frac{d^{i-1-j}z(\tau)}{d\tau^{i-1-j}}\right)^{x_{i-1-j}}\times$$

$$\frac{\partial^{S_{i-1-j,k}}}{\partial z^{S_{i-1-j,k}}}(D_\tau+D_t)^j D_t^{n-i}K[t,\tau,z(\tau)], n=1,2,\dots.$$

(2.3.5’)

где $S_{i-1-j,k}$ – сумма элементов k -той строки матрицы X_{i-1-j}, а суммирование ведётся по i, *по* j и строкам матриц X_{i-1-j} .

После выполнения всех операций, содержащихся в формуле (2.3.5’) во всех слагаемых, кроме первого, нужно положить τ равным t.

Глава 3

Ряды Ли. Представление решений дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений рядами Ли.

Как уже отмечалось в предисловии, ряды Ли были введены в рассмотрение норвежским математиком Софусом Ли (1842-1899). Ли использовал эти ряды для представления конечных преобразований непрерывных групп преобразований [74], не придавая им, как таковым, большого значения.

Более поздние исследователи также не придавали этим рядам надлежащего значения и тем более не обращали внимания на их многочисленные приложения, и они были почти забыты. Систематическое изложение теории рядов Ли дается в монографии профессора Инсбрукского университета Вольфганга Грёбнера (см. [68]). Литература по рядам Ли на русском языке представлена, прежде всего, работами и монографиями профессора Филатова Александра Николаевича (1930-2006). Первый автор этой книги хорошо знал этого замечательного ученого и большой доброты человека, глубоко благодарен Александру Николаевичу и в своей душе хранит светлую память о нём.

Интересные свойства рядов ли основаны на теореме обращения, доказанной Вольфгангом Грёбнером. Согласно этой теореме знак функции можно менять местами с символом ряда Ли. Аналогичным свойством обладает ряд Тейлора и ряд Лагранжа, которые являются весьма простыми частными случаями ряда Ли.

Ряды Ли находят разнообразные и многочисленные приложения в алгебраической геометрии [61], [62], [66], теории дифференциальных уравнений [68], [63], [67], [73], небесной механике [64], [65], в некоторых областях теоретической физики и, в особенности, в физике реакторов [59], [60]. Существенным ограничением применимости рядов Ли, например, к дифференциальным уравнениям, является аналитичность входящих в рассматриваемые уравнения функций. В связи с этим ограничением Вольфганг Грёбнер отмечает работу [71], где дано распространение методов рядов Ли на неаналитические системы дифференциальных уравнений.

Первые два параграфа этой главы содержат результаты, полученные Вольфгангом Грёбнером (см. [68]).

§1. Определение ряда Ли и его сходимость.

Определение ряда Ли дается в монографии Грёбнера [68]. Следуя Вольфгангу Грёбнеру, введём в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D = \theta_1(z_1, z_2, \dots, z_m)\frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \theta_m(z_1, z_2, \dots, z_m)\frac{\partial}{\partial z_m}, \tag{3.1.1}$$

коэффициентами которого являются функции $\theta_i(z_1, z_2, \dots, z_m), i = \overline{1, m}$, голоморфные в окрестности точки $(z_1, z_2, \dots, z_m)$. Если произвольная функция $f(z_1, z_2, \dots, z_m)$ также является голоморфной в окрестности этой точки, то подействовав оператором D на эту функцию и учитывая, что производные голоморфной функции также являются голоморфными функциями, получим:

$$Df(z) = \theta_1(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z_1} + \dots + \theta_m(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z_m}.$$

Здесь под $f(z)$ и $\theta_i(z), i = \overline{1, m}$ понимаются функции, зависящие от комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$. Подействовав на голоморфную функцию $Df(z)$ оператором D, найдем

$$D^2 f(z) = D\big(Df(z)\big).$$

Продолжая итерации далее, найдем:

$$D^{\nu} f(z) = D\big(D^{\nu-1} f(z)\big), \nu = 1,2, \dots$$

Все функции

$$D^{\nu} f(z), \nu = 1,2, \dots$$

будут голоморфными функциями в окрестности точки $(z_1, z_2, \dots, z_m)$.

Ряд вида $\sum_{\text{v}=0}^{\infty} \frac{t^{\text{v}}}{\text{v}!} D^{\text{v}} f(z) = f(z) + tDf(z) + \cdots$

(3.1.2)

называется рядом Ли. Этот ряд также можно записать в виде

$$e^{tD} f(z) \quad (3.1.3)$$

Здесь t – новая комплексная переменная, не зависящая от комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$.

Для доказательства сходимости ряда (3.1.2) воспользуемся методом мажорант Коши. Пусть $f(z)$ произвольная функция, зависящая от комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$, голоморфная в некоторой области G и P – произвольная внутренняя точка этой области. Тогда функция $f(z)$ в окрестности точки P может быть представлена сходящимся степенным рядом. Чтобы этот степенной ряд выглядел проще, надлежащим преобразованием сдвинем точку P в начало $(z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0)$. Функция $f(z)$ в некоторой окрестности начала будет разлагаться в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{i_1 \dots i_m}^{0 \dots \infty} a_{i_1 \dots i_m} z_1^{i_1} \dots z_m^{i_m}. \quad (3.1.4)$$

Рассмотрим ряд

$$g(y) = \sum_{i_1 \dots i_m}^{0 \dots \infty} b_{i_1 \dots i_m} y_1^{i_1} \dots y_m^{i_m}. \quad (3.1.5)$$

Пусть выполнено условие

$$\left| a_{i_1 \dots i_m} \right| \le b_{i_1 \dots i_m} \quad (3.1.6)$$

для всех $i_1, \dots, i_m = 0,1,2, \dots$, тогда ряд (3.1.5) называется мажорантным для ряда (3.1.4). Тот факт, что функция $g(y)$ является мажорантой для функции $f(z)$ запишем так:

$$f(z) \ll g(y).$$

Заметим, что мажорантный ряд (3.1.5) имеет действительные неотрицательные коэффициенты. Переменные $y_1 \dots y_m$ мы также будем рассматривать как действительные.

Пусть ряд (3.1.4) сходится для значений $z_1, \dots, z_m$, удовлетворяющих неравенствам

$$|z_j| \le \rho_j, j = 1,2, \dots, m,$$

тогда числовой ряд $\sum_{i_1 \dots i_m}^{0 \dots \infty} |a_{i_1 \dots i_m}| \rho_1^{i_1} \dots \rho_m^{i_m}$

будет сходящимся и поэтому будет существовать верхняя граница M для его членов.

Неравенство $|a_{i_1 \dots i_m}| \rho_1^{i_1} \dots \rho_m^{i_m} \le M$

будет выполняться для всех $i_1, \dots, i_m = 0,1,2, \dots$,

Полагая $b_{i_1 \dots i_m} = \frac{M}{\rho_1^{i_1} \dots \rho_m^{i_m}}, i_1, \dots, i_m = 0,1,2, \dots$,

видим, что условие (3.1.6) будет выполнено и мажоранта $g(y)$ может быть записана в виде $g(y) = \frac{M}{\left(1-\frac{y_1}{\rho_1}\right) \dots \left(1-\frac{y_m}{\rho_m}\right)}$ (3.1.7)

Рассмотрим функцию $G(y)$, зависящую от одной действительной переменной y,

$G(y) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i y^i$.
(3.1.8)

Если выполнено условие

$$b_i \geq \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=i} \left|a_{i_1\dots i_m}\right|, \tag{3.1.9}$$

где $a_{i_1\dots i_m}$ коэффициенты ряда (3.1.4), то функция $G(y)$ будет мажорантой и для функции $f(z)$ и для функции $\mathrm{g}(y)$.

Пусть $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \dots \rho_m\}$,

тогда если выполняются неравенства

$$0 \leq y_j \leq y < \rho, j = 1, \dots, m,$$

то для функций

$$\frac{1}{1-\frac{y_j}{\rho_j}}, j = 1, \dots, m,$$

мажорантой будет функция

$$\frac{1}{1-\frac{y}{\rho}}$$

и будут иметь место соотношения

$$\frac{1}{1-\frac{y_j}{\rho_j}} \text{‹m} \frac{1}{1-\frac{y}{\rho}}, j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y_1}{\rho_1}\right)\dots(1-\frac{y_m}{\rho_m})} \text{‹m} \frac{1}{(1-\frac{y}{\rho})^m}.$$

Функция $G(y) = \frac{M}{(1-\frac{y}{\rho})^m}$, (3.1.10)

зависящая от одной действительной переменной y будет мажорантой функции $f(z)$.

Отметим, что из соотношения

$$f(z) \text{‹m} g(y)$$

следует

$$|f(z)| \le g(y) \text{ для } |z_j| \le y_j \le \rho_j, j = 1, \dots, m, \tag{3.1.11}$$

а из соотношения $f(z) \text{ ‹m } G(y)$

следует:

$$|f(z)| \le G(y) \text{ для } |z_j| \le y < \rho, j = 1, \dots, m, \tag{3.1.12}$$

Из $f(z) \text{ ‹m } g(y)$ и $g(y) \text{ ‹m } G(y)$

следует, что $f(z) \text{ ‹m } G(y)$.

Из соотношений

$$f_i(z) \text{ ‹m } g_i(y), i = 1, \dots, n,$$

следует

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) \text{ ‹m } g_1(y) + g_2(z) + \dots + g_n(z), \tag{3.1.13}$$

$$f_1(z) \cdot f_2(z) \dots f_n(z) \text{ ‹m } g_1(y) \cdot g_2(y) \dots g_n(y), \tag{3.1.14}$$

Аналогичные соотношения следуют из соотношений

$$f_i(z) \text{ ‹m } G_i(y)$$

Рассмотрим введенные Вольфгангом Грёбнером (см. [68]), понятия мажорантных операторов.

Операторы

$$D_y = g_1(y)\frac{\partial}{\partial y_1} + g_2(y)\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + g_m(y)\frac{\partial}{\partial y_m} \tag{3.1.15}$$

и $\Delta = \theta(y)\frac{d}{dy}$ (3.1.16)

будем называть мажорантными операторами для оператора D, определенного согласно (3.1.1), если

$\theta_j(z) \text{ ‹m } g_j(y)$ и $\theta_j(z) \text{ ‹m } \theta(y), j = 1, \dots, m$.

Пусть функция $g(y)$, зависящая от действительных переменных $y_1, y_2, \dots y_m$ и функция $G(y)$, зависящая от одной действительной переменной y, являются мажорантами для функции $f(z)$, т.е.

$f(z) \text{ ‹m } g(y)$ и $f(z) \text{ ‹m } \mathrm{G}(y)$ (3.1.17)

тогда

$D^{\nu} f(z) \text{ ‹m } D_y^{\nu} g(y)$ и $D^{\nu} f(z) \text{ ‹m } \Delta^{\nu} G(y), \nu = 0,1,2, \dots$

(3.1.18)

Покажем справедливость формул (3.1.18).

Положив $\nu = 0$, получим соотношения (3.1.17).

При $\nu = 1$ первое из соотношений (3.1.18) становится очевидным, если принять во внимание, что

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} \text{ ‹m } \frac{\partial g}{\partial y_j}$$

и учесть, что имеют место соотношения (3.1.13) и (3.1.14). Второе соотношение (3.1.18) при $\nu = 1$ будет иметь вид:

$$Df(z) \text{ ‹m } \Delta G(y).$$

Чтобы доказать это последнее соотношение, прежде всего примем во внимание, что

$$z_j \text{ ‹m } y$$

и

$$Dz_j < \theta_j(z) < m\theta(y) = \Delta y.$$

Покажем теперь, что соотношение

$$D(z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m}) \text{ ‹m } \Delta y^i, \text{где } i = i_1 + i_2 + \dots + i_m,$$

справедливо для любого натурального i. Переходя от i к $i+1$, получим:

$$D\left(z_1^{i_1+1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m}\right) =$$

$$= z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m} Dz_1 + z_1 D\left(z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m}\right)$$

$$\text{‹m } (y^i \theta(y) + y\Delta y^i) = y^i \Delta y + y\Delta y^i = \Delta y^{i+1}.$$

Мы показали, что рассматриваемое соотношение справедливо для любого натурального i.

Принимая во внимание разложения (3.1.4) и (3.1.8), учитывая условие (3.1.9) и принимая во внимание, что в области равномерной сходимости ряда символ дифференцирования D можно менять местами с символом ряда, получим:

$$Df(z) = \sum_{i_1 \dots i_m}^{0 \dots \infty} a_{i_1 \dots i_m} D\left(z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m}\right)$$

$$\text{‹m } \sum_{i_1 \dots i_m}^{0 \dots \infty} \left|a_{i_1 \dots i_m}\right| \Delta y^{i_1 + \dots + i_m} \text{ ‹m } \sum_{i=0}^{\infty} b_i \Delta y^i = \Delta G(y)$$

Из (3.1.18) с учетом соотношений (3.1.13) и (3.1.14) вытекают важные оценки:

$$|D^\nu f(z)| \le D_y^\nu g(y) \text{ для } |z_j| \le y_j \le \rho_j, \qquad (3.1.19)$$

$$|D^\nu f(z)| \le \Delta^\nu G(y) \text{ для } |z_j| \le y < \rho, \qquad (3.1.20)$$

$$j = 1, \dots, m; \ \nu = 0,1,2, \dots$$

Пусть функции

$$\frac{N_k}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}$$

являются мажорантами для функций

$\theta_k(z_1, \dots, z_m)$. Положив $N = \max\{N_k\}, k = 1,2, \dots, m$, функцию $\theta(y)$, входящую в (3.1.16), определим так:

$$\theta(y) = \frac{N}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}$$

и оператор Δ запишем в виде

$$\Delta = \frac{N}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m} \frac{d}{dy} \qquad (3.1.21)$$

Ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \Delta^\nu G(y)$ (3.1.22)

будет мажорантным для ряда (3.1.2). Подействовав оператором Δ на функцию $G(y)$, получим :

$$\Delta G(y) = \frac{M}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m} \frac{mN}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}.$$

Полученный результат запишем в виде:

$$\Delta G(y) = \frac{M \cdot 1!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m} \begin{pmatrix} -\frac{m}{m+1} \\ 1 \end{pmatrix} \left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^1$$

Пусть для некоторого натурального ν имеет место равенство

$$\Delta^{\nu} G(y) = \frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\binom{-\frac{m}{m+1}}{\nu}\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu}$$

(3.1.23)

Покажем, что равенство (3.1.23) имеет место для любого натурального ν. Переходя от ν к $\nu+1$, получим:

$$\Delta(\Delta^{\nu} G(y)) = \Delta^{\nu+1} G(y) = \frac{N}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{2m}}\right]\cdot m\cdot\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m-1}\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\right)\binom{-\frac{m}{m+1}}{\nu}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu} + \frac{N}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\cdot\frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\cdot$$

$$\cdot\binom{-\frac{m}{m+1}}{\nu}\cdot\nu\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu-1}\cdot\frac{(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{2m+2}}\cdot$$

$$\cdot(m+1)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}\left(-\frac{1}{\rho}\right) = \frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\cdot$$

$$\cdot\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\cdot\frac{-m}{m+1}\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu}\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu} +$$

$$+\frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu}\cdot(-\nu)\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^2=\frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu}\cdot\frac{-m}{m+1}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu+1}+\frac{M\nu!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu}\cdot$$

$$\cdot(-\nu)\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu+1}=\frac{M\nu!\,(\nu+1)}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}\cdot$$

$$\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu}\cdot\frac{\frac{-m}{m+1}-\nu}{(\nu+1)}\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu+1}=$$

$$=\frac{M(\nu+1)!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu+1}\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu+1}$$

Мы показали, что

$$\Delta^{\nu+1}G(y)=\frac{M(\nu+1)!}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^m}\cdot\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu+1}\cdot\left[\frac{-(m+1)\cdot N}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu+1},$$

т.е. мы показали, что формула (3.1.23) справедлива для любого натурального ν.

Ряд (3.1.22) можно записать так:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}\Delta^{\nu}\,G(y)$$

$$=\frac{M}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\frac{-m}{m+1}}{\nu}\left[\frac{-(m+1)\cdot N\cdot t}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\nu}.$$

Как известно, этот ряд сходится для значений

$$|t|<T=\frac{\rho}{(m+1)\cdot N}\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}, \qquad (3.1.24)$$

а его сумма определяется по формуле

$$S(t)=\frac{M}{\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m}}\left[1-\frac{(m+1)\cdot N\cdot t}{\rho\left(1-\frac{y}{\rho}\right)^{m+1}}\right]^{\frac{-m}{m+1}} \qquad (3.1.25)$$

Итоговым результатом этого параграфа является

Теорема 3.1.1. Если $z_1, z_2, \dots, z_m$ комплексные переменные и t - новая комплексная переменная, не зависящая от комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$, а функция $f(z_1, z_2, \dots, z_m)$ и функции $\theta_i(z_1, z_2, \dots, z_m), i=\overline{1,m}$, являются голоморфными функциями в окрестности точки $(z_1, z_2, \dots, z_m)$, то ряд Ли

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}D^{\nu}f(z)$$

сходится для значений t, удовлетворяющих неравенству (3.1.24) и представляет собою голоморфную функцию в окрестности точки $(t, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Сумма этого ряда не превосходит суммы $S(t)$, определенной согласно (3.1.25).

§2. О свойствах рядов Ли.

Отметим важные свойства, которыми обладает определенный согласно (3.1.1) линейный дифференциальный оператор D. Он подчиняется тем же законам, что и оператор дифференцирования d. В первом параграфе, рассматривая функции, зависящие от комплексных переменных $z_1, \dots, z_m$, мы не всегда записывали все эти аргументы и вместо записи $f(z_1, \dots, z_m)$ писали $f(z)$. Заметив, что в этом параграфе мы будем поступать так же, приступим к рассмотрению свойств линейного дифференциального оператора D.

$$D[f_1(z) + f_2(z)] = Df_1(z) + Df_2(z) \qquad (3.2.1)$$

$$D[f_1(z)f_2(z)] = f_2(z)Df_1(z) + f_1(z)Df_2(z) \qquad (3.2.2)$$

Если $c = const$, то

$$DC = 0, \qquad (3.2.3)$$

$$D[Cf(z)] = CDf(z). \qquad (3.2.4)$$

Если $C_1, C_2, \dots, C_n$ - постоянные, то

$$D[C_1f_1(z) + C_2f_2(z) + \dots + C_nf_n(z)] = C_1Df_1(z) + C_2Df_2(z) + \dots + C_nDf_n(z) \qquad (3.2.5)$$

Отметим, что $C_1, C_2, \dots, C_n$ не обязательно должны быть постоянными, они могут быть функциями, не зависящими от переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$.

Обобщим эти формулы для итерированного дифференциального оператора D^ν.

$$D^\nu[C_1f_1(z) + C_2f_2(z) + \dots + C_nf_n(z)] = C_1D^\nu f_1(z) + C_2D^\nu f_2(z) + \dots + C_nD^\nu f_n(z), \nu = 0,1,2, \dots$$

(3.2.6)

Примем во внимание, что

если $\nu = 0$, то $D^0 f(z) = f(z)$. (3.2.7)

Подействовав оператором D ν раз на произведение $f_1(z)f_2(z)$, получим тот же результат, который получается в результате ν –кратного действия оператора дифференцирования d на произведение функций. Будем иметь:

$$D^{\nu}[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{\alpha=0}^{\nu} \binom{\nu}{\alpha} D^{\nu} f_1(z) D^{\nu-\alpha} f_2(z)$$

(3.2.8)

В предыдущем параграфе этой главы отмечалось, что ряд Ли $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} f(z)$ (3.1.2)

может быть также записан в виде

$$e^{\mathrm{tD}} f(z) \qquad (3.1.3)$$

Эту запись можно рассматривать как действие оператора e^{tD} на функцию $f(z)$. Подействовав оператором e^{tD} на сумму

$$C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z) + \cdots + C_n f_n(z),$$

очевидно, получим:

$$e^{tD}[C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z) + \cdots + C_n f_n(z)] = C_1 e^{tD} f_1(z) + C_2 e^{tD} f_2(z) + \cdots + C_n e^{tD} f_n(z)$$

(3.2.9)

Подействовав оператором e^{tD} на произведение двух функций $f_1(z)f_2(z)$ получим:

$$e^{\mathrm{tD}}[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu [f_1(z)f_2(z)]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{t^\nu}{\alpha!\,(\nu-\alpha)!} [D^\nu f_1(z)] D^{\nu-\alpha}[f_2(z)]$$

Положим $\beta = \nu - \alpha$.

Тот же результат, что дает двойная сумма, получим, считая, что α и β изменяются от нуля до бесконечности независимо друг от друга. Поэтому можно записать

$$e^{\mathrm{tD}}[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{t^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f_1(z) \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{t^\beta}{\beta!} D^\beta f_2(z)$$

или

$$e^{\mathrm{tD}}[f_1(z)f_2(z)] = [e^{\mathrm{tD}} f_1(z)][e^{\mathrm{tD}} f_2(z)] \qquad (3.2.10)$$

Принимая во внимание, что произведение голоморфных функций $f_1(z)f_2(z)$ представляет собою голоморфную функцию, получим, что соотношение (3.2.10) будет верным и для произведения трех функций $f_1(z)f_2(z)$ и $f_3(z)$. Продолжая совершенно аналогично далее, получим, что для любого натурального n будет иметь место соотношение

$$e^{\mathrm{tD}}[f_1(z)f_2(z) \dots f_n(z)] \\ = [e^{\mathrm{tD}} f_1(z)][e^{\mathrm{tD}} f_2(z)] \dots [e^{\mathrm{tD}} f_n(z)]$$

Если $P(f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$

полином, аргументами которого являются функции $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$, то

$$e^{\mathrm{tD}}P(f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)) =$$
$$P(e^{\mathrm{tD}}f_1(z), e^{\mathrm{tD}}f_2(z), \dots, e^{\mathrm{tD}}f_n(z)) \qquad (3.2.11)$$

Введем в рассмотрение функции

$$Z_j = \varphi_j(z,t) = e^{\mathrm{tD}}z_j, j = 1,2, \dots, m, \qquad (3.2.12)$$

которые в области голоморфности оператора D и некоторой окрестности точки $t = 0$ представляют собою голоморфные функции $\mathrm{m} + 1$ переменных $z_1, z_2, \dots, z_m, t$. При $t = 0$

$$(Z_j)_{t=0} = z_j, j = 1,2, \dots, m, \qquad (3.2.12')$$

Пусть функция $f(z)$ представляет собою голоморфную функцию в окрестности точки $(z_1, z_2, \dots, z_m)$, а также является голоморфной и в точке $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$, что при достаточно малых t будет иметь место, и пусть

$$f(z) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{0 \dots \infty} a_{i_1 \dots m} {z_1}^{i_1} \dots {z_m}^{i_m}.$$

Сумму первых членов этого ряда, для которых выполняется условие

$$i_1 + i_2 + \dots + i_m \leq k,$$

обозначим через $f_k(z)$ тогда

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z) = f(z) \text{ и } \lim_{k\to\infty} f_k(Z) = f(Z)$$

(3.2.13)

Принимая во внимание, что сходящийся степенной ряд можно почленно дифференцировать, аналогичные предельные соотношения будут выполняться как для производных первого порядка

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial z_j} f_k(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}, j = 1,2, \dots, m,$$

так и для производных высших порядков, и мы можем записать

$$\lim_{k\to\infty} D^{\nu} f_k(z) = D^{\nu} f(z), \nu = 0,1,2, \ldots, \qquad (3.2.14)$$

Поскольку $f_k(z)$ – полином, будет иметь место соотношение

$$e^{\mathrm{tD}} f_k(z) = f_k(e^{\mathrm{tD}} z)$$

или

$$f_k(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} f_k(z), k = 1,2, \ldots \qquad (3.2.15)$$

Мажоранта функции $f(z)$ одновременно является и мажорантой для всех полиномов $f_k(z)$. Все входящие в правую часть соотношения (3.2.15) ряды Ли имеют общую мажоранту и сходятся равномерно относительно k, поэтому можно поменять местами знак предела со знаком суммы и записать:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} \lim_{k\to\infty} D^{\nu} f_k(z), \qquad (3.2.16)$$

Принимая во внимание соотношения (3.2.13) и (3.2.15), (3.2.16) и (3.2.14), получим:

$$f(Z) = \lim_{k\to\infty} f_k(Z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} f_k(z) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} \lim_{k\to\infty} D^{\nu} f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} D^{\nu} f(z)$$

или

$$e^{\mathrm{tD}} f(z) = f(e^{\mathrm{tD}} z).$$

Сформулируем фундаментальную теорему Вольфганга Грёбнера:

Теорема 3.2.1. (Теорема обращения): Пусть $f(z)$ - произвольная голоморфная в окрестности точки $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ функция, разложение которой в степенной ряд представляет собою ряд, сходящийся также в точке $(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$, что для достаточно малых t всегда будет иметь место. Тогда знак функции f можно менять местами с символом e^{tD}

$$e^{\mathrm{tD}} f(z) = f(e^{\mathrm{tD}} z)$$

В [68] показано, что если z - независимая комплексная переменная, а функция $f(z)$ является голоморфной функцией в окрестности точки z, то полагая

$$D = \frac{d}{dz},$$

воспользовавшись теоремой обращения, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z:

$$f(z+t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(z).$$

§3. Приложение рядов Ли к дифференциальным уравнениям.

В предыдущем параграфе согласно (3.2.12) были введены в рассмотрение функции

$$Z_j = \varphi_j(z_1, z_2, \dots, z_m, t) = e^{tD} z_j, j = 1,2, \dots, m.$$

В области голоморфности оператора D и в некоторой окрестности точки $t = 0$ функции Z_j представляют собою голоморфные функции $m+1$ переменных $z_1, z_2, \dots, z_m, t$. При $t = 0$

$$(Z_j)_{t=0} = z_j, j = 1,2, \dots, m. \tag{3.3.1}$$

Примем во внимание, что

$$Z_j = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu z_j = z_j + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu z_j = z_j +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^{\nu-1} \theta_j\,(z_1, z_2, \dots, z_m), j = 1,2, \dots, m.$$

Выполнив дифференцирование по t, получим:

$$\frac{dZ_j}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} D^{\nu-1} \theta_j\,(z_1, z_2, \dots, z_m) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{(\nu)!} D^\nu \theta_j\,(z_1, z_2, \dots, z_m) = e^{\mathrm{tD}} \theta_j (z_1, z_2, \dots, z_m)$$

$$= \theta_j (e^{\mathrm{tD}} z_1, e^{\mathrm{tD}} z_2, \dots, e^{\mathrm{tD}} z_m) = \theta_j (Z_1, Z_2, \dots, Z_m),$$

$$j = 1,2, \dots, m.$$

Система

$$\frac{dZ_j}{dt} = \theta_j(Z_1, Z_2, \dots, Z_m), j = 1,2, \dots, m. \qquad (3.3.2)$$

представляет собою автономную систему дифференциальных уравнений, а решение задачи Коши (3.3.2), (3.3.1) определяется по формулам:

$$Z_j = e^{\mathrm{tD}} z_j, j = 1,2, \dots, m. \qquad (3.3.3)$$

В самом начале второй главы были введены в рассмотрение линейные дифференциальные операторы

$$D_k^1 = \frac{d^{k+1} z_1(t)}{dt^{k+1}} \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{d^{k+1} z_2(t)}{dt^{k+1}} \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + \frac{d^{k+1} z_m(t)}{dt^{k+1}} \frac{\partial}{\partial z_m},$$

$$k = 0,1,2, \dots \qquad (2.0.1)$$

Далее при отыскании решения задачи Коши (3.3.2), (3.3.1) мы будем пользоваться операторами

$$\frac{D_k}{(k+1)!} = c_{k+1}^{(1)} \frac{\partial}{\partial z_1} + c_{k+1}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + c_{k+1}^{(m)} \frac{\partial}{\partial z_m}, k = 0,1,2, \dots, \qquad (3.3.3')$$

где $c_{k+1}^{(j)}, j = 0,1,2, \dots, m$, коэффициенты рядов Ли (3.3.3).

Воспользовавшись фундаментальным результатом Вольфганга Грёбнера, рассмотрим простые частные случаи.

Пусть $j = 1$, т.е. пусть система (3.3.2) состоит из одного уравнения, а задача Коши имеет вид:

$$\frac{dZ}{dt} = \theta(Z) \qquad (3.3.4)$$

$$(Z)_{t=0} = z \qquad (3.3.5)$$

Пусть функция $\theta(z)$ является голоморфной функцией в окрестностях точек z и Z, тогда решение задачи Коши (3.3.4), (3.3.5) определится рядом Ли

$$Z = e^{\mathrm{tD}} z, \tag{3.3.6}$$

где $D = \theta(z)\frac{\partial}{\partial z}$.

Используем аппарат рядов Ли для отыскания решения задачи Коши для дифференциальных уравнений. Рассмотрим очень простые примеры уравнений, когда решение задачи Коши выражается в замкнутой форме и является совершенно очевидным, и посмотрим, позволяет ли использование изложенных выше концепций увидеть закономерности, которым подчиняются коэффициенты разложений этих решений в степенные ряды.

Рассмотрим два простых примера.

Пример 1.

Дана задача Коши

$$Z' = Z, \tag{3.3.7}$$

$$(Z)_{t=0} = z = 1 \tag{3.3.8}$$

Требуется показать, что функция

$$Z = e^t$$

является решением задачи Коши (3.3.7), (3.3.8) следующими двумя способами:

1. Воспользовавшись формулой (3.3.6)
2. Воспользовавшись теоремой 2.1.2.

Первое решение:

Воспользовавшись формулой (3.3.6) и принимая во внимание, что $D = z\frac{d}{dz}$, получим:

$$Z = e^{\mathrm{tD}}z = z + \frac{t}{1!}z\frac{dz}{dz} + \frac{t^2}{2!}z\frac{dz}{dz} + \frac{t^3}{3!}z\frac{dz}{dz} + \cdots + \frac{t^n}{n!}z\frac{dz}{dz} + \cdots,$$

$Z = ze^t$.

При $z = 1, Z = e^t$.

Второе решение.

Пусть функция Z является решением задачи Коши (3.3.7), (3.3.8) пусть и разложение функции Z в ряд Маклорена имеет вид

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad (3.3.9)$$

Зная первые два коэффициента, $c_0 = c_1 = 1$, степенного ряда (3.3.9), остальные коэффициенты этого ряда найдем, воспользовавшись теоремой 2.1.2.

Принимая во внимание, что $\theta(Z) = Z$, воспользовавшись формулой (2.1.9), будем иметь:

$$\frac{d^{n+1}Z(t)}{dt^{n+1}} = \sum_{X_n} \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_j!\ldots x_n!}\frac{d^{S_n}Z}{dZ^{S_n}} \cdot \left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(t)}{dt}\right)^{x_1} \ldots \left(\frac{1}{j!}\frac{d^jZ(t)}{dt^j}\right)^{x_j} \ldots \left(\frac{1}{n!}\frac{d^nZ(t)}{dt^n}\right)^{x_n},$$

$$n = 1,2, \ldots \qquad (3.3.10)$$

Умножая обе части равенства (3.3.10) на $\frac{1}{(n+1)!}$ и полагая $t = 0$, получим:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}c_n, n = 1,2, \ldots \qquad (3.3.11)$$

Из формулы (3.3.11) следует, что

$$c_n = \frac{1}{n!}, n = 0,1,2, \dots$$

и разложение (3.3.9) запишется так:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

Мы показали, что

$$Z = e^t.$$

Пример 2.

Дана задача

$$Z' = Z^2, \tag{3.3.12}$$

$$(Z)_{t=0} = z = 1 \tag{3.3.13}$$

Требуется показать, что функция

$$Z = \frac{1}{1-t}$$

является решением задачи Коши (3.3.12), (3.3.13) теми же двумя способами, что и в предыдущем примере.

Первое решение:

Принимая во внимание, что

$$D = z^2 \frac{d}{dz},$$

получим:

$$Z = e^{\mathrm{tD}} z = z + \frac{t}{1!} z^2 \frac{dz}{dz} + \frac{t^2}{2!} z^2 \frac{dz^2}{dz} + \frac{t^3}{3!} 2!\, z^2 \frac{dz^3}{dz} + \cdots + \frac{t^n}{n!} (n-1)!\, z^2 \frac{dz^n}{dz} + \cdots = z + tz^2 + t^2 z^3 + \cdots + t^n z^{n+1} + \cdots,$$

При $z = 1, Z = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots$.

т.е.

$$Z = \frac{1}{1-t}.$$

Второе решение:

Пусть функция Z является решением задачи Коши (3.3.12), (3.3.13) и разложение функции Z в ряд Маклорена имеет вид (3.3.9). Принимая во внимание, что $\theta(Z) = Z^2$, воспользовавшись формулой (2.1.9), будем иметь:

$$\frac{d^{n+1} Z(t)}{dt^{n+1}} = \sum_{X_n} \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_j! \ldots x_n!} \frac{d^{S_n} Z^2}{dZ^{S_n}} \cdot \left(\frac{1}{1!} \frac{dZ(t)}{dt}\right)^{x_1} \ldots \left(\frac{1}{j!} \frac{d^j Z(t)}{dt^j}\right)^{x_j} \ldots \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n Z(t)}{dt^n}\right)^{x_n}, n = 1,2, \ldots$$

(3.3.14)

Умножая обе части равенства (3.3.14) на $\frac{1}{(n+1)!}$, затем полагая $t = 0$ и учитывая, что $(Z)_{t=0} = z$, получим:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{X_n} \frac{1}{x_1! x_2! \ldots x_j! \ldots x_n!} \frac{d^{S_n} Z^2}{dZ^{S_n}} {c_1}^{x_1} \ldots {c_j}^{x_j} \ldots {c_n}^{x_n}.$$

(3.3.15)

Первые два коэффициента степенного ряда (3.3.9) нам известны, $c_0 = c_1 = 1$. Воспользовавшись формулой (3.3.15), найдем следующие коэффициенты ряда (3.3.9).

Нахождение коэффициента c_2

$$c_2 = \frac{1}{2}\sum_{X_1} \frac{1}{x_1!}\frac{dz^2}{dz}c_1{}^{x_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1!}2z$$

При нахождении коэффициента c_2 суммирование ведется по строке одноэлементной матрицы $X_1 = (1)$. Принимая во внимание, что z$= 1$, получим: $c_2 = 1$.

Нахождение коэффициента c_3 .

При нахождении коэффициента c_3 суммирование будет выполняться по строкам матрицы

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_3 = \frac{1}{3}\sum_{X_2} \frac{1}{x_1!\,x_2!}\frac{d^{S_2}z^2}{dz^{S_2}}c_1{}^{x_1}c_2{}^{x_2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2!\,0!}\frac{d^2z^2}{dz^2}1^2 1^0 + \frac{1}{0!\,1!}\frac{dz^2}{dz}1^0 1^1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2!}2 + 2z\right)$$

Принимая во внимание, что z$= 1$, окончательно получим:

$$c_3 = \frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot\left[\frac{3}{2}\right] + 1\right) = 1.$$

Нахождение коэффициента c_4.

При нахождении коэффициента c_4 суммирование будет выполняться по строкам матрицы

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c_4 = \frac{1}{4}\sum_{X_3} \frac{1}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\frac{d^{S_3}z^2}{dz^{S_3}}{c_1}^{x_1}{c_2}^{x_2}{c_3}^{x_3}$$

При нахождении коэффициента c_4 суммирование будет выполняться по последним двум строкам матрицы X_3 , поскольку первое слагаемое, получающееся в результате суммирования по первой строке матрицы X_3, будет равным нулю.

$$c_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1!\,1!\,0!}2 + \frac{1}{0!\,0!\,1!}2z\right)$$

$$c_4 = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{4}{2} = 1$$

В первой главе мы находили матрицы X_4, X_5, X_6 . Принимая во внимание формулу (3.3.15) и выполняя суммирование по трем последним строкам матрицы X_4, получим:

$$c_5 = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1!\,0!\,1!\,0!}2 + \frac{1}{0!\,2!\,0!\,0!}2 + \frac{1}{0!\,0!\,0!\,1!}2z\right),$$

$$c_5 = \frac{1}{5}\cdot\left(2\cdot\left[\frac{5}{2}\right] + 1\right) = 1$$

Воспользовавшись формулой (3.3.15) и выполняя суммирование по трем последним строкам матрицы X_5, получим:

$$c_6 = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{1!0!0!1!0!}2 + \frac{1}{0!1!1!0!0!}2 + \frac{1}{0!0!0!0!1!}2z\right),$$

$$c_6 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{6}{2} = 1$$

Воспользовавшись формулой (3.3.15) и выполняя суммирование по седьмой и трем последним строкам матрицы X_6, получим:

$$c_7 = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{1!0!0!0!1!0!} 2 + \frac{1}{0!1!0!1!0!0!} 2 + \frac{1}{0!0!2!0!0!0!} 2 + \frac{1}{0!0!0!0!0!1!} 2z \right)$$

$$c_7 = \frac{1}{7} \cdot \left(2 \cdot \left[\frac{7}{2}\right] + 1 \right) = 1$$

Все найденные нами коэффициенты равны единице. Нахождение этих коэффициентов позволило нам увидеть закон, по которому они получаются. Пусть при любом натуральном n

$$c_n = 1, \ \ n \in N, \qquad (3.3.15`)$$

тогда разложение функции Z в ряд Маклорена будет иметь вид

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

или

$$Z = \frac{1}{1-t}.$$

Принимая во внимание, что функция $Z = \frac{1}{1-t}$ является решением рассматриваемой задачи Коши, заключаем, что равенство (3.3.15`) будет иметь место для любого натурального n .

Поскольку сумма, представляющая собою четное число n , слагаемыми которой являются двойки, будет иметь $\frac{n}{2}$ слагаемых, а сумма, представляющая собою нечетное число n, будет иметь $\left[\frac{n}{2}\right]$ двоек и одну единицу, коэффициенты ряда Маклорена (3.3.9) будут вычисляться по формуле:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \frac{n}{2}, \text{если } n - \text{четное}, n \in N \\ \frac{1}{n} \cdot \left(2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right), \text{если } n - \text{нечетное}, n \in N \end{cases}$$

Мы показали, что решая задачу Коши вторым способом, мы пришли к тому же результату, к которому пришли, решая её первым способом.

Рассмотренная задача позволяет сделать следующее простое утверждение:

Теорема 3.3.1. При любом натуральном $n \geq 2$, если число n - четное, то матрица X_n будет содержать $\frac{n}{2}$ строк, сумма элементов которых равна числу 2 , $\frac{n}{2} - 1$ строк будут содержать два отличных от нуля элемента равных единице, а предпоследняя строка этой матрицы будет содержать единственный отличный от нуля элемент, равный двум. Если же число $n -$ нечетное, то матрица X_n будет содержать $\left[\frac{n}{2}\right]$ строк , каждая из которых имеет два отличных от нуля элемента, равных единице .

Суммы элементов строк матрицы X_n образуют последовательность натуральных чисел. Наибольшее число, входящее в эту последовательность, равно n, а наименьшее равно единице. Число n является первым элементом последовательности, а единица – ее последним членом, числа n и единица, входящие в рассматриваемую последовательность, не повторяются. Остальные числа, заключенные между единицей и n, могут повторяться, например число 2 согласно теореме 3.3.1. повторяется $\left[\frac{n}{2}\right]$ раз, если число n нечётное и $\frac{n}{2}$ раз, если число n чётное. Если, например, $n = 10$, то число строк матрицы X_{10}, суммы элементов которых равны двум, будет ровно пяти, а если $n = 100$, то пятидесяти. Заметим, что если $n = 10$, то число строк матрицы X_{10} будет равно 42, $p(10) = 42$, а если $n = 100$, то $p(100) = 190\,569\,292$ (см [49]). Отметим, что члены рассматриваемой последовательности не образуют ни возрастающей, ни убывающей последовательности.

§4. Отыскание решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dZ}{dt} = \theta(t, Z), \qquad (3.4.1)$$

$$Z(t_0) = z_0. \qquad (3.4.2)$$

Пусть функция $\theta(t, Z)$ является голоморфной в окрестности точки $\theta(t_0, z_0)$ и в окрестности этой точки разлагается в ряд Тейлора вида

$$\theta(t, Z) = \sum_{l,m} a_{l,n}(t - t_0)^l\,(Z - z_0)^n, \qquad (3.4.3)$$

где

$$a_{l,n} = \frac{1}{l!n!}\frac{\partial^{l+n}\theta(t,Z)}{\partial t^l \partial Z^n}, t = t_0, Z = z_0; l = 0,1,2,\ldots;\ n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.4.4)$$

Пусть разложение искомой функции $Z(t)$ в ряд Тейлора имеет вид:

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t - t_0)^k. \qquad (3.4.5)$$

Принимая во внимание теорему 2.2.2 и полагая в формуле (2.2.3) $t = 0$, получим:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_{n,0} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{X_k}\frac{S_k}{x_1!x_2!\ldots x_i!\ldots x_k!}a_{n-k,S_k}{c_1}^{x_1}\ldots{c_i}^{x_i}\ldots{c_k}^{x_k}, n = 1,2,\ldots \qquad (3.4.6)$$

Здесь суммирование выполняется по k и по строкам матрицы X_k. Как уже отмечалось в формулировке теоремы 2.2.2, под S_k понимается сумма элементов той строки матрицы X_k, по которой ведется суммирование. Далее мы будем перечислять строки, элементы которых суммируются. Если суммируются элементы -той строки матрицы X_k, то сумму элементов этой строки будем обозначать через $S_{k,i}$.

Введем в рассмотрение матрицу-строку A_{n-k,S_k} и диагональную матрицу C_k. Обе матрицы содержат $p(k)$элементов.

$$A_{n-k,S_k} = \left[a_{n-k,S_{k,1}} \dots a_{n-k,S_{k,i}} \dots a_{n-k,S_{k,p(k)}}\right], n = 1,2, \dots ; k = 1,2, \dots , n \qquad (3.4.7)$$

элементы рассматриваемой матрицы-строки определяются согласно (3.4.4), $S_{k,i}$ - сумма элементов -той строки матрицы $X_k, i = 1,2, \dots , p(k)$.

$$C_k = diag\left[c_1{}^{(k)}, \dots , c_i{}^{(k)}, \dots c_{p(k)}{}^{(k)}\right], \qquad (3.4.8)$$

где

$$c_i{}^{(k)} = \frac{S_{k,i}!}{x_{i1}!x_{i2}! \dots x_{ij}! \dots x_{ik}!} c_1{}^{x_{i1}} \dots c_j{}^{x_{ij}} \dots c_k{}^{x_{ik}} \qquad (3.4.9)$$

x_{ij} – элементы -той строки матрицы $X_k, k = 1,2, \dots , n;\ j = 1,2, \dots , k;\ i = 1,2, \dots , p(k)$.

Произведение матрицы-строки A_{n-k,S_k} на диагональную матрицу C_k представляет собою матрицу-строку, содержащую $p(k)$ элементов. Обозначив через $\sigma[A_{n-k,S_k} \times C_k]$ сумму элементов этой матрицы-строки , формулу (3.4.6) запишем так:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n,0} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sigma[A_{n-k,S_k} \times C_k] , n = 1,2, \dots \qquad (3.4.10)$$

Пусть найдены первые n коэффициентов $c_1, c_2, \dots , c_n$.

Примем во внимание, что коэффициент c_n определяется по формуле

$$c_n = \frac{1}{n} a_{n-1,0} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma[A_{n-1-k,S_k} \times C_k], n = 2,3, \ldots \tag{3.4.11}$$

Увеличивая n на единицу, коэффициент c_{n+1} найдем по формуле (3.4.10), которую запишем так:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n,0} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma\left[A_{n-k,S_k} \times C_k\right] + \frac{1}{n+1} \sigma\left[A_{0,S_n} \times C_n\right], n = 2,3, \ldots \tag{3.4.12}$$

При нахождении коэффициента c_{n+1} используются все диагональные матрицы $\mathrm{C}_k, k = 1,2, \ldots, n-1$, которые использовались при нахождении предыдущего коэффициента c_n. Зная коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$, для нахождения коэффициента c_{n+1}, нужно найти только одну диагональную матрицу C_n.

Сумма слагаемых, входящих в (3.4.11) будет отличаться от суммы первых n слагаемых, входящих в формулу (3.4.12), поскольку в формулу (3.4.11) входят матрицы-строки A_{n-1-k,S_k}, а в формулу (3.4.12) матрицы-строки A_{n-k,S_k}.

§5. Отыскание решений задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

$$\frac{dZ_j}{dt} = \theta_j(Z_1, Z_2, \dots, Z_m), j = 1,2, \dots, m, \tag{3.5.1}$$

$$(Z_j)_{t=0} = z_j = 0 \tag{3.5.2}$$

Решение рассматриваемой задачи Коши определяется по формулам:

$$Z_j = e^{tD} z_j, j = 1,2, \dots, m. \tag{3.5.3}$$

Функции $\theta_j(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ представляет собою голоморфные функции в окрестности точки $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, а функции $Z_j(t)$ являются голоморфными функциями в окрестности точки $z_j, j = 1,2, \dots, m$.

Принимая во внимание теорему 2.1.1 и воспользовавшись определением оператора D_k (3.3.3'), коэффициенты разложений в ряды Маклорена функций $Z_j(t)$ будем определять по формулам:

$$\mathrm{c}_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{n+1} \sum_{X_n} \frac{1!}{x_1! \, x_2! \dots x_k! \dots x_n!} \times \left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2} \dots \left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}} \dots$$

$$\dots \left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n} \theta_j(z_1, z_2, \dots, z_m),$$

$$j = 1,2, \dots, m; \; n = 1,2, \dots \tag{3.5.4}$$

Введем в рассмотрение матрицу $X_n - X_n^1$. Эта матрица получается из матрицы X_n путем удаления из матрицы X_n всех строк, первые элементы которых не меньше единицы.

Дадим еще одно определение матрицы $X_n - X_n^1$. Прежде чем давать второе определение введенной в рассмотрение матрицы, напомним, что под матрицей X_n^1 понимается матрица, получающаяся из X_{n-1}^1 путем добавления к столбцам этой матрицы нулевого столбца и увеличения элементов ее первого столбца на единицу. Матрицу $X_n - X_n^1$ можно определить еще так: под матрицей $X_n - X_n^1$ понимается матрица, получающаяся из матрицы X_n путем удаления из матрицы X_n всех элементов, входящих в матрицу X_n^1.

Принимая во внимание введенную в рассмотрение матрицу $X_n - X_n^1$, формулы (3.5.4) запишем так:

$$c_{n+1}^{(j)} = \frac{1}{n+1}\sum_{X_n^1}\frac{1!}{x_1!\,x_2!\dots x_k!\dots x_n!}\times\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\dots$$

$$\left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\dots\left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n}\theta_j(z_1, z_2, \dots, z_m) +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{X_n - X_n^1}\frac{1!}{x_1!\,x_2!\dots x_k!\dots x_n!}$$

$$\times\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\dots\left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n}\theta_j(z_1, z_2, \dots, z_m)$$

$$j = 1,2, \dots, m;\ n = 1,2, \dots \qquad (3.5.5)$$

Далее рассмотрим очень простые дифференциальные уравнения, имеющие очевидные решения и найдем решения задачи Коши для этих уравнений, воспользовавшись формулами (3.4.12), (3.3.3) и (3.5.5).

Пример 1.

Найти решение задачи Коши

$$Z' = e^t + 2Z - 2 \qquad (3.5.6)$$

$$(Z)_{t=0} = z = 0 \tag{3.5.7}$$

Следующими тремя способами:

1. Воспользоваться формулой (3.4.12)
2. Рассматриваемую задачу Коши (3.5.6), (3.5.7) записать в виде задачи Коши для автономной системы двух дифференциальных уравнений, а затем воспользоваться формулой (3.3.3).
3. Так же как в предыдущем пункте, свести рассматриваемую задачу к задаче Коши для автономной системы двух дифференциальных уравнений, а для отыскания ее решения воспользоваться формулой (3.5.5).

Первое решение:

Функцию

$$\theta(t, Z) = e^t + 2Z - 2,$$

представляющую собой правую часть уравнения (3.5.6) разложим в ряд Маклорена. Коэффициенты этого разложения будут определяться по формуле (3.4.4).

Примем во внимание, что

$$a_{0,0} = -1 \tag{3.5.8}$$

$$a_{0,1} = 2 \tag{3.5.9}$$

$$a_{0,n} = 0, \text{если } n \geq 2 \text{ и } n \in \mathrm{N} \tag{3.5.10}$$

$$a_{l,n} = 0, \text{если } l \in \mathrm{N} \text{ и } n \in \mathrm{N} \tag{3.5.11}$$

$$a_{l,0} = \frac{1}{l!}, \text{где } l \in \mathrm{N} \tag{3.5.12}$$

Далее мы будем пользоваться этими формулами, приняв во внимание , что формула (3.5.10) вытекает из того, что для $\theta(t, Z) = e^t + 2Z - 2$

$$\frac{\partial^n \theta(t,z)}{\partial z^n} = 0, \text{если } n \geq 2 \text{ и } n \in \mathrm{N}, \qquad (3.5.10')$$

а формула (3.5.11) следует из того, что

$$\frac{\partial^{l+n} \theta(t,z)}{\partial t^l \partial z^n} = 0, \text{если } l \in \mathrm{N} \text{ и } n \in \mathrm{N} \qquad (3.5.11')$$

Принимая во внимание, что матрица-строка A_{n-k,S_k} определяется согласно (3.4.7), диагональная матрица C_k определяется согласно (3.4.8), а ее элементы определяются согласно (3.4.9), найдем коэффициенты разложения в ряд Маклорена искомой функции $Z(t)$.

Зная первые два коэффициента разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена, $c_0 = 1$ и $c_1 = -1$, найдем следующие четыре коэффициента этого разложения.

Отыскание коэффициента c_2.

Пусть разложение функции $Z(t)$ в ряд Маклорена имеет вид

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad (3.5.13)$$

Приняв во внимание, что $c_0 = 0$ и $c_1 = -1$, коэффициент c_2 найдем по формуле (3.4.11). Полагая в этой формуле $n = 2$, получим

$$c_2 = \frac{1}{2} a_{1,0} + \frac{1}{2} \sigma[A_{0,S_1} \times C_1]$$

Принимая во внимание, что $a_{0,1} = 1$, матрица A_{0,S_1} представляет собою одноэлементную матрицу, содержащую единственный элемент 2, а матрица C_1 также является одноэлементной матрицей, содержащей единственный элемент -1, получим:

$c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\big[[2] \times [-1]\big] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-2) = -\frac{1}{2!}$

$c_2 = -\frac{1}{2!}$

Отыскание коэффициента c_3.

Для нахождения коэффициента c_3 нужно знать диагональную матрицу C_2. Принимая во внимание, что

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и учитывая, что элементы диагональных матриц определяются согласно (3.4.9), получим $c_1^{(2)} = c_1^2$, $c_2^{(2)} = c_2$. Диагональная матрица C_2 будет иметь вид:

$$C_2 = \begin{pmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Полагая в формуле (3.4.12) $n = 2$, получим:

$$c_3 = \frac{1}{3}a_{2,0} + \frac{1}{3}\sigma[A_{1,S_1} \times C_1] + \frac{1}{3}\sigma[A_{0,S_2} \times C_2].$$

Принимая во внимание, что

$A_{1,S_1} = \big[a_{1,1}\big] = [0]$, $A_{0,S_2} = [a_{0,2} \quad a_{0,1}] = [0 \quad 2]$,

$C_1 = [c_1] = [-1]$, $C_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

получим:

$$c_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{2!} + \frac{1}{3}\ \sigma\big[[0] \times [-1]\big]$$

$$+ \frac{1}{3}\ \sigma \left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{3!} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - 1) = -\frac{1}{3!}$$

$$c_3 = -\frac{1}{3!}$$

Отыскание коэффициента c_4.

Для нахождения коэффициента c_4 нужно найти вначале диагональную матрицу C_3. Чтобы найти матрицу C_3, запишем матрицу ЦНР

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, воспользовавшись формулой (3.4.9), найдем:

$c_1^{(3)} = c_1^3,\ \ c_2^{(3)} = 2c_1c_2,\ \ \ c_3^{(3)} = c_3.$

Диагональная матрица C_3 будет иметь вид:

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Полагая в формуле (3.4.12) $n = 3$, получим:

$c_4 = \frac{1}{4}a_{3,0} + \frac{1}{4}\sigma[A_{2,S_1} \times C_1] + \frac{1}{4}\sigma[A_{1,S_2} \times C_2] + \frac{1}{4}\sigma[A_{0,S_3} \times C_3].$

Принимая во внимание, что

$c_1 = -\frac{1}{1!}, c_2 = -\frac{1}{2!}, c_3 = -\frac{1}{3!},$

$$A_{2,1} = [a_{2,1}] = [0],\ A_{1,S_2} = [a_{1,2} \quad a_{1,1}] = [0 \quad 0],$$

$$A_{0,S_3} = [a_{0,3} \quad a_{0,2} \quad a_{0,1}] = [0 \quad 0 \quad 2],$$

$$C_1 = [c_1] = [-1],\ C_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3!} \end{bmatrix},$$

получим:

$$c_4 = \frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\,\sigma\big[[0] \times [-1]\big] + \frac{1}{4}\,\sigma\left[[0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\right] +$$

$$+\frac{1}{4}\,\sigma\left[[0 \quad 0 \quad 2] \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3!} \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{4!} + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3!}\right)$$

$$= -\frac{1}{4!}$$

$$c_4 = -\frac{1}{4!}$$

Отыскание коэффициента c_5.

Для нахождения коэффициента c_5 нужно знать диагональную матрицу C_4. Нахождение матрицы C_4, начнем с того, что запишем матрицу ЦНР

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4\,0\,0\,0 \\ 2\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 0\,2\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

затем воспользуемся формулой (3.4.9) и найдем элементы диагональной матрицы C_4:

$c_1^{(4)} = c_1^4,\ c_2^{(4)} = 3c_1^2 c_2,\ c_3^{(4)} = 2c_1 c_3,\ c_4^{(4)} = c_2^2, c_5^{(4)} = c_4$.

Найдя элементы диагональной матрицы C_4 запишем эту матрицу:

$$C_4 = \begin{bmatrix} c_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3c_1^2 c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Полагая в формуле (3.4.12) $n = 4$, получим:

$c_5 = \frac{1}{5} a_{4,0} + \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{3} \sigma[A_{4-k,S_k} \times C_k] + \frac{1}{5}\sigma[A_{0,S_4} \times C_4] = \frac{1}{5} a_{4,0} + \frac{1}{5}\sigma[A_{3,S_1} \times C_1] + \frac{1}{5}\sigma[A_{2,S_2} \times C_2] + \frac{1}{5}\sigma[A_{1,S_3} \times C_3] + \frac{1}{5}\sigma[A_{0,S_4} \times C_4]$.

Приняв во внимание формулы (3.5.11), (2.5.10), (3.5.9), будем иметь:

$A_{3,S_1} = [a_{3,1}] = [0], A_{2,S_2} = [a_{2,2} \quad a_{2,1}] = [0 \quad 0]$,

$A_{1,S_3} = [a_{1,3} \quad a_{1,2} \quad a_{1,1}] = [0 \quad 0 \quad 0]$,

$A_{0,S_4} = [a_{0,4} \quad a_{0,3}\ a_{0,2} \quad a_{0,1}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 2]$.

Учитывая, что матрицы-строки A_{3,S_1} , A_{2,S_2} , A_{1,S_3} имеют только нулевые элементы, видим, что сумма, определяющая коэффициент c_5 будет иметь только два слагаемых:

$c_5 = \frac{1}{5} a_{4,0} + \frac{1}{5} 2c_4 = \frac{1}{5}\frac{1}{4!} - 2\frac{1}{5}\frac{1}{4!} = -\frac{1}{5!}$

Мы нашли первые пять коэффициентов разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена

$$c_n = -\frac{1}{n!}, n = 1,2,3,4,5.$$

Если

$$c_n = -\frac{1}{n!}, n = 1,2, \dots \qquad (3.5.13')$$

и формула (3.5.13’) верна для любого натурального n, то разложение функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

или

$$Z(t) = 1 - e^t$$

Поскольку $Z(t) = 1 - e^t$ является решением рассматриваемой задачи Коши, то формула (3.5.13’) будет верна для любого натурального n.

Заметим, что проделанные выкладки, связанные с вычислением коэффициентов разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена можно было и не выполнять.

Действительно, для определения коэффициентов $c_3, c_4,$ и c_5, мы пользовались формулой (3.4.12)

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n,0} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma\left[A_{n-k,S_k} \times C_k\right] + \frac{1}{n+1} \sigma\left[A_{0,S_n} \times C_n\right], n = 2,3, \dots.$$

Все слагаемые, входящие в сумму

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma\left[A_{n-k,S_k} \times C_k\right]$$

равны нулю, поскольку все матрицы-строки $A_{n-k,s_k}, k = 1,2, \dots, n-1$, имеют только нулевые элементы (см. (3.5.11)). Матрица-строка A_{0,s_k} имеет только последний элемент, равный 2 (см. (3.5.9),(3.5.10)), все остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Второе решение.

Полагая $Z_1(t) = t$, $Z_2(t) = Z(t)$, задачу Коши (3.5.6), (3.5.7) запишем как задачу Коши для автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Z_1' = 1 \\ Z_2' = e^{Z_1} + 2Z_2 - 2 \end{cases} \tag{3.5.14}$$

$$\left(Z_1(t)\right)_{t=0} = z_1 = 0, \left(Z_2(t)\right)_{t=0} = z_2 = 0, \tag{3.5.15}$$

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z_1} + (e^{z_1} + 2z_2 - 2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Мы положили $Z_1(t) = t$ (то, что $Z_1(t) = t$ следует из первого уравнения системы (3.5.14)), поэтому рассматриваемая задача сводится к отысканию функции $Z_2(t)$. Воспользовавшись фундаментальным результатом, полученным Вольфгангом Грёбнером, формулой (3.3.3), будем иметь:

$$Z_2(t) = e^{tD} z_2 \tag{3.5.16}$$

Правая часть соотношения (3.5.16) представляет собою степенной ряд. Определим первые три слагаемых, являющихся членами этого ряда.

Первое слагаемое:

Подействуем оператором D на z_2:

$tDz_2 = \left[\frac{\partial z_2}{\partial z_1} + (e^{Z_1} + 2z_2 - 2)\frac{\partial z_2}{\partial z_2}\right] t = [(2 - 1)e^{Z_1} + 2z_2 - 2]t.$

Первый член рассматриваемого степенного ряда имеет вид:

$$[(2-1)e^{Z_1} + 2z_2 - 2]\frac{t}{1!}$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0, z_2 = 0$, получим:

$$-\frac{t}{1!}.$$

Второе слагаемое:

$\frac{1}{2!}(tD)^2 z_2 = \frac{t^2}{2!}D(e^{Z_1} + 2z_2 - 2) = \left[\frac{\partial}{\partial z_1}(e^{Z_1} + 2z_2 - 2) + (e^{Z_1} + 2z_2 - 2)\frac{\partial}{\partial z_2}(e^{Z_1} + 2z_2 - 2)\right]\frac{t^2}{2!} = [e^{Z_1} + (e^{Z_1} + 2z_2 - 2)2]\frac{t^2}{2!} = [(2^2 - 1)e^{Z_1} + 2^2 z_2 - 2^2]\frac{t^2}{2!}.$

Второй член рассматриваемого степенного ряда имеет вид:

$$[(2^2-1)e^{Z_1} + 2^2 z_2 - 2^2]\frac{t^2}{2!}.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0, z_2 = 0$, получим:

$$-\frac{t^2}{2!}.$$

Третье слагаемое:

$$\frac{1}{3!}(tD)^3 z_2 = \frac{t^3}{3!} D[(2^2-1)e^{Z_1} + (2^2 z_2 - 2^2] = \left[\frac{\partial}{\partial z_1}((2^2-1)e^{Z_1} + 2^2 z_2 - 2^2) + (e^{Z_1} + 2z_2 - 2)\frac{\partial}{\partial z_2}[(2^2-1)e^{Z_1} + 2^2 z_2 - 2^2]\right]\frac{t^3}{3!} = [(2^2-1)e^{Z_1} + (e^{Z_1} + 2z_2 - 2)2^2]\frac{t^3}{3!} = [(2^3-1)e^{Z_1} + 2^3 z_2 - 2^3]\frac{t^3}{3!}.$$

Третий член рассматриваемого степенного ряда имеет вид:

$$[(2^3-1)e^{Z_1} + 2^3 z_2 - 2^3]\frac{t^3}{3!}.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0, z_2 = 0$, получим:

$$-\frac{t^3}{3!}.$$

Пусть n – произвольное натуральное число и пусть -ый член рассматриваемого ряда имеет вид:

$$[(2^n-1)e^{Z_1} + 2^n z_2 - 2^n]\frac{t^n}{n!}$$

Чтобы найти $(n+1)$-ый член рассматриваемого ряда, найдем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!}(tD)^{n+1}z_2 \\
&= \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}D[(2^n-1)e^{Z_1}+2^n z_2-2^n] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial z_1}[(2^n-1)e^{Z_1}+2^n z_2-2^n]\right. \\
&+ (e^{Z_1}+2z_2-2)\frac{\partial}{\partial z_2}[(2^n-1)e^{Z_1} \\
&\left.+ 2^n z_2-2^n]\right]\frac{t^{n+1}}{n+1!} \\
&= [(2^n-1)e^{Z_1} \\
&+ (e^{Z_1}+2z_2-2)2^n]\frac{t^{n+1}}{n+1!} \\
&= [(2^{n+1}-1)e^{Z_1}+2^{n+1}z_2 \\
&- 2^{n+1}]\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

Мы показали, что $(n+1)$ -ый член рассматриваемого ряда будет иметь вид:

$$[(2^{n+1}-1)e^{Z_1}+2^{n+1}z_2-2^{n+1}]\frac{1}{(n+1)!}t^{n+1}$$

и искомая функция $Z_2(t)$ определится степенным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(2^n-1)e^{Z_1}+2^n z_2-2^n]\frac{1}{n!}t^n$$

Принимая во внимание, что $z_1 = z_2 = 0$, окончательно получим:

$$Z_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n!}\right) t^n$$

Мы показали, что функции

$$Z_1(t) = t \text{ и } Z_2(t) = 1 - e^t$$

являются решениями задачи Коши (3.5.14), (3.5.15).

Третье решение.

Найдем решение задачи Коши (3.5.14), (3.5.15), воспользовавшись формулами (3.5.4) и (3.5.5), содержащими линейные дифференциальные операторы (см. (3.3.3')).

$$\frac{D_k}{(k+1)!} = c_{k+1}^{(1)} \frac{\partial}{\partial z_1} + c_{k+1}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + c_{k+1}^{(m)} \frac{\partial}{\partial z_m}, k = 0,1,2, \ldots ; m \in N$$

Решение первого уравнения, входящего в рассматриваемую автономную, известно: $Z_1(t) = t$,

разложение функции $Z_1(t)$ в ряд Маклорена будет содержать только одно отличное от нуля слагаемое, $c_1^{(1)} = 1, c_n^{(1)} = 0$, если $n \geq 2$ и $n \in N.$

Мы будем заниматься отысканием решения второго уравнения, входящего в систему (3.5.14). Принимая во внимание формулу (3.5.4), коэффициенты разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будем искать по формуле:

$$c_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{n+1}\sum\nolimits_{X_n} \frac{1!}{x_1!x_2!\ldots x_k!\ldots x_n!} \times$$
$$\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\ldots\left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\ldots\left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n}\theta_2(z_1,z_2), n \in N$$
(3.5.17)

Здесь $\theta_2(z_1,z_2) = e^{z_1} + 2z_2 - 2,$ (3.5.18)

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}, \qquad (3.5.19)$$

$$\frac{D_k}{(k+1)!} = c_{n+1}^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}, k \in N \qquad (3.5.20)$$

Отыскание коэффициента $c_2^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 1$, получим:

$$c_2^{(2)} = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{X_1}\frac{1!}{x_1!}D_0\theta_2(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\left(c_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(e^{z_1} + 2z_2 - 2) = \frac{1}{2}(e^{z_1} - 2).$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_2^{(2)} = -\frac{1}{2!}$$

Отыскание коэффициента $c_3^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 2$, получим:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3}\sum\nolimits_{X_2}\frac{1!}{x_1!x_2!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\theta_2(z_1,z_2).$$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_1}{2!}\theta_2(z_1, z_2)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(c_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!}\left(c_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1, z_2)\right]$$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 (e^{z_1} + 2z_2 - 2) - \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial z_2}(e^{z_1} + 2z_2 - 2)\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2!}e^{z_1} - \frac{1}{2!}2\right).$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_3^{(2)} = -\frac{1}{3!}$$

Отыскание коэффициента $c_4^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 3$, получим:

$c_4^{(2)} = \frac{1}{4}\sum_{X_3} \frac{1!}{x_1! x_2! x_3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3} \theta_2(z_1, z_2).$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^3 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_0}{1!}\frac{D_1}{2!}\theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_2}{3!}\theta_2(z_1, z_2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(c_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^3 \theta_2(z_1, z_2) + \left(c_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(c_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1, z_2) + \left(c_3^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1, z_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^3 (e^{z_1} + 2z_2 - 2) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(-\frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)(e^{z_1} + 2z_2 - 2) - \frac{1}{3!}\frac{\partial}{\partial z_2}(e^{z_1} + 2z_2 - 2)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3!}e^{z_1} - \frac{1}{3!}2\right).$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_4^{(2)} = -\frac{1}{4!}$$

Повторим еще раз отыскание коэффициента $c_4^{(2)}$, но на этот раз воспользуемся формулой (3.5.5).

Полагая в формуле (3.5.5) $j = 2$, $n = 3$, получим:

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{4}\sum_{X_3^1} \frac{1}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\theta_2(z_1, z_2) + \frac{1}{4}\sum_{X_3 - X_3^1} \frac{1}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\theta_2(z_1, z_2).$$

Здесь

$$X_3^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а разность $X_3 - X_3^1$ представляет собою матрицу-строку

$$X_3 - X_3^1 = (0 \quad 0 \quad 1).$$

Находя коэффициент $c_3^{(2)}$, мы получили:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}e^{z_1} - \frac{1}{2!}2\right].$$

Вместо того, чтобы выполнять суммирование по строкам матрицы X_3^1, подействуем на результат, полученный при нахождении коэффициента $c_3^{(2)}$, оператором D_0:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{4}D_0\left[\frac{1}{2!}e^{z_1} - \frac{1}{2!}2\right] = \frac{1}{3}\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left[\frac{1}{2!}e^{z_1} - \frac{1}{2!}2\right]$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{2!}e^{z_1} = \frac{1}{4!}e^{z_1}$$

Найдем последнее слагаемое:

$$\frac{1}{4}\sum_{X_3 - X_3^1}\frac{1}{x_1!x_2!x_3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\theta_2(z_1, z_2) =$$
$$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3!}\right)\frac{\partial}{\partial z_2}(e^{z_1} + 2z_2 - 2) = -\frac{1}{4!}2.$$

Складывая результаты, полученные при суммировании по строкам матрицы X_3^1 и матрицы $X_3 - X_3^1$, получим:

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{4!}(e^{z_1} - 2).$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_4^{(2)} = -\frac{1}{4!}$$

Отыскание коэффициента $c_5^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 4$, получим:

$$\text{c}_5^{(2)} = \frac{1}{5}\sum_{X_4} \frac{1!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\left(\frac{D_3}{4!}\right)^{x_4}\theta_2(z_1, z_2)$$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получим:

$$\begin{aligned} \text{c}_5^{(2)} = \frac{1}{5}\Bigg[\frac{1}{4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^4 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^2\left(\frac{D_1}{2!}\right)\theta_2(z_1, z_2) \\ + \left(\frac{D_0}{1!}\right)\left(\frac{D_2}{3!}\right)\theta_2(z_1, z_2) \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2) + \left(\frac{D_3}{4!}\right)\theta_2(z_1, z_2)\Bigg] \\ = \\ = \frac{1}{5}\Bigg[\frac{1}{4!}\left(\text{c}_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + \text{c}_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^4 \theta_2(z_1, z_2) \\ + \frac{1}{2!}\left(\text{c}_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + \text{c}_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2\Bigg(\text{c}_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} \\ + \text{c}_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\Bigg)\theta_2(z_1, z_2) \\ + \left(\text{c}_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + \text{c}_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\Bigg(\text{c}_3^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} \\ + \text{c}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\Bigg)\theta_2(z_1, z_2) \\ + \frac{1}{2!}\left(\text{c}_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + \text{c}_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2) \\ + \left(\text{c}_4^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + \text{c}_4^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1, z_2)\Bigg] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^4 (e^{z_1} + 2z_2 - 2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)(e^{z_1} + 2z_2 - 2) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(-\frac{1}{3!}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)(e^{z_1} + 2z_2 - 2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 (e^{z_1} + 2z_2 - 2) + \left(-\frac{1}{4!}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)(e^{z_1} + 2z_2 - 2)\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4!}e^{z_1} - \frac{1}{4!}2\right).$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_5^{(2)} = -\frac{1}{5!}$$

Повторим отыскание коэффициента $c_5^{(2)}$, воспользовавшись формулой (3.5.5).

$$c_5^{(2)} = \frac{1}{5}\sum_{X_4^1} \frac{1!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\left(\frac{D_3}{4!}\right)^{x_4}\theta_2(z_1, z_2)$$
$$+\frac{1}{5}\sum_{X_4 - X_4^1} \frac{1!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\left(\frac{D_3}{4!}\right)^{x_4}\theta_2(z_1, z_2)$$

Здесь

$$X_4^1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_4 - X_4^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Не выполняя суммирования по строкам матрицы X_4^1, подействуем на результат, полученный при нахождении коэффициента $c_4^{(2)}$, оператором D_0:

$$\frac{1}{4!}\frac{1}{5}D_0(e^{z_1} - 2) = \frac{1}{5!}e^{z_1}.$$

Найдем

$$\frac{1}{5}\sum_{X_4-X_4^1}\frac{1}{x_1!\,x_2!\,x_3!\,x_4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\left(\frac{D_3}{4!}\right)^{x_4}\theta_2(z_1,z_2)$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}(e^{z_1}+2z_2-2)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(-\frac{1}{4!}\right)\frac{\partial}{\partial z_2}(e^{z_1}+2z_2-2)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4!}\right)2=-\frac{1}{5!}2.$$

Складывая найденные результаты, получим:

$c_5^{(2)}=-\frac{1}{5!}e^{z_1}-\frac{1}{5!}2=\frac{1}{5!}(e^{z_1}-2).$

Принимая во внимание, что $z_1=0$, получим:

$c_5^{(2)}=-\frac{1}{5!}.$

Те закономерности, которые имели место при отыскании найденных четырёх коэффициентов $c_n^{(2)}$, $n=2{,}3{,}4{,}5$, сохранятся и для произвольного натурального числа n.

Покажем, что если n - произвольное натуральное число, то

$$c_2^{(n)}=-\frac{1}{n!}.$$

Принимая во внимание, что если n число нечетное, то матрица X_n будет содержать только две строки, имеющие только один отличный от нуля элемент. В этом случае первый элемент первой строки равен n, а последний элемент последней строки будет равен единице. Все же остальные строки матрицы X_n будут содержать более одного отличного от нуля элемента. Принимая во внимание соотношения (3.5.18), (3.5.19) и (3.5.20), видим, что при суммировании в формуле (3.5.17) по строкам матрицы X_n, начиная со второй строки и заканчивая предпоследней строкой, все слагаемые, получающиеся в результате этого суммирования, будут нулями. В результате суммирования по первой строке, получим $\frac{1}{n!}$, а в результате суммирования по последней строке получим $-\frac{2}{n!}$. Окончательно получим:

$$c_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{n!}2\right).$$

Если число n - четное, то третьей строкой, содержащей единственный отличный от нуля элемент, будет предпоследняя строка. В этом случае $x_{\frac{n}{2}} = 2$ и слагаемое, получающееся в результате суммирования по этой строке, будет

$$\left(c_{\frac{n}{2}}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2).$$

Это слагаемое будет равным нулю. Мы показали, что при любом натуральном n

$$c_n^{(2)} = -\frac{1}{n!}.$$

Пример 2.

Найти решение задачи Коши

$$Z' = Z + \cos t - \sin t, \qquad (3.5.21)$$

$Z(0) = z = 0$ (3.5.22)

теми же тремя способами, которыми решалась задача Коши в предыдущем примере.

Первое решение.

Функцию

$$\theta(t, Z) = Z + \cos t - \sin t,$$

представляющую собою правую часть уравнения (3.5.21) разложим в ряд Маклорена. Коэффициенты этого разложения будут определяться по формуле (3.4.4). Имеем:

$a_{0,0} = 1$ (3.5.23)

$a_{0,1} = 1$ (3.5.24)

$a_{0,n} = 0$, если $n \geq 2$ и $n \in N$ (3.5.25)

$a_{l,n} = 0$, если $l \in N$ и $n \in N$ (3.5.26)

$$a_{l,0} = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{l!}, \text{если } \left\{\frac{l}{4}\right\} = \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{l!} \text{ если } \left\{\frac{l}{4}\right\} = \frac{2}{4} \\ \ \frac{1}{l!} \text{ если } \left\{\frac{l}{4}\right\} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{l!} \text{ если } \left\{\frac{l}{4}\right\} = 0, l \in N, \frac{l}{4} = \left[\frac{l}{4}\right] + \left\{\frac{l}{4}\right\} \end{array}\right. \qquad (3.5.27)$$

Коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будем определять, пользуясь формулой (3.4.11). Принимая во внимание, что $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, найдем следующие коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена.

Отыскание коэффициента c_2.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 2$, получим:

$$c_2 = \tfrac{1}{2} a_{1,0} + \tfrac{1}{2} \sigma\left[A_{0,S_1} \times C_1\right].$$

Принимая во внимание, что

$$a_{1,0} = -1, \quad A_{0,S_1} = \left[a_{1,0}\right] = [1], C_1 = [c_1] = [1],$$

получим: $c_2 = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2} = 0,$

$c_2 = 0.$

Отыскание коэффициента c_3.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 3$, получим:

$$c_3 = \tfrac{1}{3} a_{2,0} + \tfrac{1}{3} \sigma\left[A_{1,S_1} \times C_1\right] + \tfrac{1}{3} \sigma\left[A_{0,S_2} \times C_2\right].$$

Принимая во внимание, что

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

воспользовавшись формулами (3.4.9) и (3.4.8), запишем матрицу

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что

$$a_{2,0} = -\frac{1}{2!}, A_{1,S_1} = \left[a_{1,1}\right] = [0], A_{0,S_2} = [a_{0,2} \quad a_{0,1}] = [0 \quad 1],$$

получим:

$$c_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2!}\right) + \frac{1}{3}\sigma\left[[0] \times [1]\right] + \frac{1}{3}\sigma\left[[0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = -\frac{1}{3!},$$

$$c_3 = -\frac{1}{3!}.$$

Отыскание коэффициента c_4.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 4$, получим:

$$c_4 = \tfrac{1}{4} a_{3,0} + \tfrac{1}{4}\sigma\left[A_{2,S_1} \times C_1\right] + \tfrac{1}{4}\sigma\left[A_{1,S_2} \times C_2\right] + \tfrac{1}{4}\sigma\left[A_{0,S_3} \times C_3\right].$$

Принимая во внимание, что

$$X_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

найдем матрицу

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3!} \end{bmatrix}$$

Принимая во внимание, что

$$a_{3,0} = \frac{1}{3!}, \quad A_{2,S_1} = \left[a_{2,1}\right] = [0], \quad A_{1,S_2} = [a_{1,2} \quad a_{1,1}] = [0 \quad 0],$$

$$A_{0,S_3} = [a_{0,3} \quad a_{0,2} \quad a_{0,1}] = [0 \quad 0 \quad 1],$$

получим:

$$c_4 = \frac{1}{4}\frac{1}{3!} + \frac{1}{4}\sigma\left[[0] \times [1]\right] + \frac{1}{4}\sigma\left[[0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] + \frac{1}{4}\sigma\left[[0 \quad 0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{3!} \end{bmatrix}\right] = \frac{1}{4!} - \frac{1}{4!} = 0.$$

$$c_4 = 0.$$

Отыскание коэффициента c_5.

Полагая в формуле (3.4.12) $n = 4$, получим:

$c_5 = \frac{1}{5} a_{4,0} + \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{3} \sigma\left[A_{4-k,S_k} \times C_k\right] + \frac{1}{5} \sigma\left[A_{0,S_4} \times C_4\right]$.

Принимая во внимание, что

$$X_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

найдем матрицу

$$C_4 = \begin{bmatrix} c_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3{c_1}^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Принимая во внимание, что

$A_{3,S_1} = \left[a_{3,1}\right] = [0], \quad A_{2,S_2} = [a_{2,2} \quad a_{2,1}] = [0 \quad 0],$

$A_{1,S_3} = [a_{1,3} \quad a_{1,2} \quad a_{1,1}] = [0 \quad 0 \quad 0],$

$A_{0,S_4} = [a_{0,4} \quad a_{0,3} \quad a_{0,2} \quad a_{0,2} \quad a_{0,1}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1],$

найдем:

$$c_5 = \frac{1}{5} a_{4,0} + \frac{1}{5} \sigma\left[A_{3,S_1} \times C_1\right] + \frac{1}{5} \sigma\left[A_{2,S_2} \times C_2\right] + \frac{1}{5} \sigma\left[A_{1,S_3} \times C_3\right] +$$

$$+\frac{1}{5}\sigma\left[A_{0,S_4}\times C_4\right]$$

$$=\frac{1}{5}\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}\sigma\left[[0]\times[1]\right]$$

$$+\frac{1}{5}\sigma\left[\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]$$

$$+\frac{1}{5}\sigma\left[\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3!}\end{bmatrix}\right]$$

$$+\frac{1}{5}\left[\sigma\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2}{3!} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right]=\frac{1}{5!}.$$

$$c_5=\frac{1}{5!}.$$

Те закономерности, которые имели место при отыскании найденных коэффициентов, будут иметь место для любого натурального n. В силу (3.5.26) при любом натуральном n все матрицы-строки $A_{n-k,S_k}, k=1,2,\dots,n-1$, будут содержать только нулевые элементы. Матрица A_{0,S_n} в силу (3.5.24) и (3.5.25) будет иметь последний элемент равный единице, все же остальные элементы этой матрицы будут нулями. Принимая это во внимание, формулу (3.4.12) запишем так:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n,0} + \frac{1}{n+1} \sigma\left[A_{0,S_n} \times C_n\right] \qquad (3.5.28)$$

Отметим, что первое слагаемое, входящее в формулу (3.5.28) всегда будут отличным от нуля. Второе слагаемое, входящее в эту формулу, будет отличным от нуля, если n нечетное и будет равным нулю, если число n четное. Если число n нечетное, то формула (3.5.28) запишется так:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_{n,0} + \frac{1}{n+1} c_n \qquad (3.5.29)$$

где

$$a_{n,0} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{n!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{n!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{3}{4}, \end{bmatrix} \qquad (3.5.30)$$

$$c_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{n!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{3}{4}, \end{bmatrix} \qquad (3.5.31)$$

Из формул (3.5.30) и (3.5.31) следует, что все чётные коэффициенты разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будут равны нулю. Если число n чётное, то последний столбец диагональной матрицы C_n будет содержать только нулевые элементы и формула (3.5.28) запишется так:

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} a_{2n,0}, \quad n = 0,1,2,\dots$$
(3.5.31’)

Коэффициенты разложения функции $Z(t)$ определяются по формуле (3.5.31’). Разложение этой функции в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} t^{2n-1}.$$

Мы показали, что $Z(t) = \sin t$ будет решением задачи Коши (3.5.21), (3.5.22).

Второе решение.

Полагая $Z_1(t) = t, Z_2(t) = Z(t)$, задачу Коши (3.5.21), (3.5.22), запишем как задачу Коши для автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Z_1{}' = 1 \\ Z_2{}' = Z_2 + \cos Z_1 - \sin Z_1 \end{cases} \tag{3.5.32}$$

$$\left(Z_1(t)\right)_{t=0} = z_1 = 0, \left(Z_2(t)\right)_{t=0} = z_2 = 0, \tag{3.5.33}$$

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z_1} + (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Поскольку функция $Z_1(t)$ нам известна, $Z_1(t) = t$, будем заниматься отысканием второй, неизвестной функции $Z_2(t)$. Принимая во внимание (3.3.3),будем иметь:

$$Z_2(t) = e^{tD} z_2. \tag{3.5.34}$$

Правая часть соотношения (3.5.34) представляет собою степенной ряд. Определим первые четыре слагаемых, являющихся членами этого ряда.

Первое слагаемое.

$$tDz_2 = \left[\frac{\partial z_2}{\partial z_1} + (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) \frac{\partial z_2}{\partial z_2}\right] t = (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)t.$$

Первое слагаемое рассматриваемого степенного ряда имеет вид:

$$(z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)\frac{1}{1!}t.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим:

$$\frac{1}{1!}t$$

Второе слагаемое.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}(tD)^2 z_2 = \frac{t^2}{2!}D(z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) \\ = \left[\frac{\partial}{\partial z_1}(z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) + (z_2 \right. \\ + \cos z_1 - \sin z_1)\frac{\partial}{\partial z_2}(z_2 + \cos z_1 \\ \left. - \sin z_1)\right]\frac{t^2}{2!} \\ = (-\sin z_1 - \cos z_1 + z_2 + \cos z_1 \\ - \sin z_1)\frac{t^2}{2!} = (z_2 - 2\sin z_1)\frac{t^2}{2!}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим, что второй член разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет равен нулю.

Третье слагаемое.

$$\frac{1}{3!}(tD)^3 z_2 = \frac{t^3}{3!}D(z_2 - 2\sin z_1)$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial z_1}(z_2 - 2\sin z_1) + (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)\frac{\partial}{\partial z_2}(z_2 - 2\sin z_1)\right]\frac{t^3}{3!}$$
$$= (-2\cos z_1 + z_2 + cos z_1 - \sin z_1)\frac{t^3}{3!}$$
$$= (z_2 - \cos z_1 - \sin z_1)\frac{t^3}{3!}.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим, что третий член разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет равен

$$-\frac{t^3}{3!}.$$

Четвертое слагаемое.

$$\frac{1}{4!}(tD)^4 z_2 = \frac{t^4}{4!}D(z_2 - \cos z_1 - \sin z_1)$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial z_1}(z_2 - \cos z_1 - \sin z_1) + (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)\frac{\partial}{\partial z_2}(z_2 - \cos z_1 - \sin z_1)\right]\frac{t^4}{4!}$$
$$= (\sin z_1 - \cos z_1 + z_2 + \cos z_1 - \sin\ z_1)\frac{t^4}{4!} = z_2\frac{t^4}{4!}.$$

Принимая во внимание, что $z_2 = 0$, получим, что четвертый член разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет равен нулю.

Далее все полученные результаты будут повторяться. При любом натуральном n , если n - число четное, -ый коэффициент разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет равен нулю. Если же натуральное число n – нечетное, то -ый коэффициент разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет определяться по формуле

$$c_n = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{n!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{n!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{3}{4}, \end{array}\right. \qquad (3.5.34')$$

Разложение функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1}.$$

Мы показали, что решением задачи Коши (3.5.32), (3.5.33) является функции $Z_1(t) = t$ и $Z_2(t) = \sin t$.

Третье решение.

Принимая во внимание, что согласно (3.3.3')

$$\frac{D_k}{(k+1)!} = \mathrm{c}_{k+1}{}^{(1)} \frac{\partial}{\partial z_1} + \mathrm{c}_{k+1}{}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots$$
$$+ \mathrm{c}_{k+1}{}^{(m)} \frac{\partial}{\partial z_m}, k = 0,1,2, \dots \ ; \ m \in N,$$

воспользовавшись формулой (3.5.4), найдем решение задачи Коши (3.5.32), (3.5.33). Поскольку $Z_1(t) = t$,

разложение функции $Z_1(t)$ в ряд Маклорена будет содержать только одно отличное от нуля слагаемое, $\mathrm{c}_1{}^{(1)} = 1, c_n{}^{(1)} = 0, \text{и } n \geq 2 \text{ и } n \in N$. Мы будем заниматься отысканием решения только второго уравнение, входящего в систему (3.5.32). Для нахождения коэффициентов разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будем пользоваться формулой (3.5.17)

$$\text{c}_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{n+1}\sum_{X_n} \frac{1}{x_1!x_2!\ldots x_k!\ldots x_n!} \times \left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2} \ldots \left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}} \ldots \left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n} \theta_2(z_1, z_2), n \in N.$$

Примем во внимание, что

$$\theta_2(z_1, z_2) = z_2 + \cos z_1 - \sin z_1, \qquad (3.5.35)$$

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \qquad (3.5.36)$$

$$\frac{D_k}{(k+1)!} = \text{c}_{k+1}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}, k \in N \qquad (3.5.37)$$

Отыскание коэффициента $\text{c}_2^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 1$, получим:

$$\text{c}_2^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{X_1} \frac{1!}{x_1!} D_0 \theta_2(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) = \frac{1}{2}(-\sin z_1 - \cos z_1 + 1).$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$\text{c}_2^{(2)} = 0.$$

Отыскание коэффициента $\text{c}_3^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 2$, получим:

$$\text{c}_3^{(2)} = \frac{1}{3}\sum_{X_2} \frac{1}{x_1!x_2!} \left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2} \theta_2(z_1, z_2).$$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_1}{2!}\theta_2(z_1, z_2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) + c_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}(z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)\right]$$

$= \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(-\sin z_1 - \cos z_1 + 1) = \frac{1}{3!}(-\cos z_1 + \sin z_1).$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_3^{(2)} = -\frac{1}{3!}$$

Отыскание коэффициента $c_4^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 3$, получим:

$c_4^{(2)} = \frac{1}{4}\sum_{X_3} \frac{1!}{x_1! x_2! x_3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3} \theta_2(z_1, z_2).$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$
\mathrm{c}_4^{(2)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^3 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_0}{1!}\frac{D_1}{2!}\theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_2}{3!}\theta_2(z_1, z_2)\right]
$$

$$
= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^3 (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\mathrm{c}_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}\ (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1) + \mathrm{c}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}(z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)\right] =
$$

$$
= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(-\cos z_1 + \sin z_1) + \mathrm{c}_3^{(2)}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3!}(\sin z_1 + \cos z_1) - \frac{1}{3!}\right).
$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$
\mathrm{c}_4^{(2)} = 0.
$$

Отыскание коэффициента $\mathrm{c}_5^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 4$, получим:

$$
\mathrm{c}_5^{(2)} = \frac{1}{5}\sum\nolimits_{X_4} \frac{1}{x_1! x_2! x_3! x_4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\left(\frac{D_3}{4!}\right)^{x_4}\theta_2(z_1, z_2).
$$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$
X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

получим:

$$c_5^{(2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^4 \theta_2(z_1,z_2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^2 \frac{D_1}{2!}\theta_2(z_1,z_2)\right.$$

$$+ \frac{D_0}{1!}\frac{D_2}{3!}\theta_2(z_1,z_2) + \frac{1}{2!}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^2 \theta_2(z_1,z_2)$$

$$\left.+ \frac{D_3}{4!}\theta_2(z_1,z_2)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^4 \theta_2(z_1,z_2)\right.$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \left(c_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1}\right.$$

$$\left.+ c_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1,z_2)$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(c_3^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1}\right.$$

$$\left.+ c_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1,z_2)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(c_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1,z_2)$$

$$\left.+ \left(c_4^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + c_4^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\theta_2(z_1,z_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^4 (z_2 + \cos z_1 - \sin z_1)\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(-\frac{1}{3!}\right)\frac{\partial}{\partial z_2}(z_2 + \cos z_1$$

$$\left.- \sin z_1)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right)(\sin z_1 + cos\, z_1)\right]$$

$$= \frac{1}{5!}(\cos z_1 - \sin z_1)$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_5^{(2)} = \frac{1}{5!}$$

Покажем, что те закономерности, которые имели место при нахождении коэффициентов c_2, c_3, c_4 и c_5 сохранятся и при определении следующих коэффициентов разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена.

Если натуральное число n четное и если $\mathrm{n} = 4k + 2, k = 0,1,2, \ldots$, т.е. если $\left\{\frac{\mathrm{n}}{4}\right\} = \frac{1}{2}$, то в формуле (3.5.17) суммирование будет проводиться по строкам матрицы X_n и коэффициент c_{n+1} будет определяться первым слагаемым, входящим в рассматриваемую сумму.

$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(D_0)^n \theta_2(z_1, z_2) = \frac{1}{(n+1)!}(-\cos z_1 + \sin z_1)$.

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!}.$$

Если же $n = 4k, k \in N$, т.е. если $\left\{\frac{n}{4}\right\} = 0$, то

$$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(D_0)^n \theta_2(z_1, z_2)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!}(\cos z_1 - sin z_1)$$

И, принимая во внимание, что z_1=0, получим :

$$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Итак, если натуральное число n четное, то

$$c_{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{(n+1)!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{(n+1)!}, \text{если } \left\{\frac{n}{4}\right\} = 0, \end{cases} \qquad (3.5.38)$$

Если натуральное число n является нечетным и $\mathrm{n} = 4k+1, k \in N$, то в формуле (3.5.17) суммирование будет проводиться по строкам матрицы X_n и коэффициент c_{n+1} будет определяться суммой первого и последнего слагаемого, входящим в рассматриваемую сумму.

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!}(D_0)^n\theta_2(z_1, z_2) + c_n\right] = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!}(-\sin z_1 - \cos z_1) + \frac{1}{n!}\right].$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_{n+1} = 0.$$

Если натуральное число n является нечетным и $\mathrm{n} = 4k+3, k = 0{,}1{,}1{,}2 \ldots$, то также как и в случае когда $\mathrm{n} = 4k+1$, коэффициент c_{n+1} будет определяться суммой двух слагаемых.

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!}(D_0)^n\theta_2(z_1, z_2) + c_n\right] = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n!}(\sin z_1 + \cos z_1) - \frac{1}{n!}\right].$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, получим:

$$c_{n+1} = 0.$$

Мы показали, что четные коэффициенты разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будут равны нулю, отличными от нуля будут только нечетные коэффициенты, которые определяются согласно (3.5.38). Разложение функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1} \ .$$

Мы показали, что решением задачи Коши (3.5.32), (3.5.33) являются функции

$$Z_1(t) = t \text{ и } Z_2(t) = \sin t.$$

Пример 3.

Найти решение задачи Коши

$$Z'(t) = 1 - \frac{e^{Z(t)}+1}{1-t}, \qquad (3.5.39)$$

$$Z(0) = z = 0 \qquad (3.5.40)$$

теми же тремя способами, которыми решалась задача Коши в предыдущих примерах.

Первое решение.

Функцию

$$\theta(t, Z) = 1 - \frac{e^{Z}+1}{1-t},$$

представляющую собою правую часть уравнения (3.5.39) разложим в ряд Маклорена. Коэффициенты этого разложения будут определяться по формуле (3.4.4). Имеем:

$$a_{0,0} = 1 \qquad (3.5.41)$$

$$a_{l,0} = -2, l \in N \qquad (3.5.42)$$

$$a_{l,n} = -\frac{1}{n!}, l = 0,1,2, \dots \quad ; n \in N \qquad (3.5.43)$$

Коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будем определять, пользуясь формулой (3.4.11). Принимая во внимание, что $c_0 = 0, c_1 = -1$, найдем следующие коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена.

Отыскание коэффициента c_2.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 2$, получим:

$$c_2 = \tfrac{1}{2} a_{1,0} + \tfrac{1}{2} \sigma\left[A_{0,S_1} \times C_1\right].$$

Принимая во внимание, что

$$a_{1,0} = -2,\ A_{0,S_1} = [-1], C_1 = [c_1] = [-1],$$

получим:

$$c_2 = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}\sigma\big[[-1] \times [-1]\big] = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Отыскание коэффициента c_3.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 3$, получим:

$$c_3 = \tfrac{1}{3} a_{2,0} + \tfrac{1}{3} \sigma\left[A_{1,S_1} \times C_1\right] + \tfrac{1}{3} \sigma\left[A_{0,S_2} \times C_2\right].$$

Принимая во внимание, что

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

воспользовавшись формулами (3.4.9) и (3.4.8), запишем матрицу

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что

$$a_{2,0} = -2,\ A_{1,S_1} = [a_{1,1}] = [-1],\ A_{0,S_2} = [a_{0,2} \quad a_{0,1}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix},$$

получим:

$$c_3 = \frac{1}{3}(-2) + \frac{1}{3}\sigma\big[[-1]\times[-1]\big] + \frac{1}{3}\sigma\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sigma\begin{bmatrix} -\frac{1}{2!} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}.$$

Отыскание коэффициента c_4.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 4$, получим:

$$c_4 = \tfrac{1}{4}a_{3,0} + \tfrac{1}{4}\sigma\big[A_{2,S_1} \times C_1\big] + \tfrac{1}{4}\sigma\big[A_{1,S_2} \times C_2\big] + \tfrac{1}{4}\sigma\big[A_{0,S_3} \times C_3\big].$$

Принимая во внимание, что

$$X_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

найдем матрицу

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_1c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2(-1)(-\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что

$$a_{3,0} = -2,\ A_{2,S_1} = \left[a_{2,1}\right] = [-1],\ A_{1,S_2} = [a_{1,2} \quad a_{1,1}\ ] = \left[-\frac{1}{2} \quad -1\right],$$

$$A_{0,S_3} = [a_{0,3} \quad a_{0,2}\ a_{0,1}\ ] = \left[-\tfrac{1}{3!} \quad -\tfrac{1}{2!} \quad -1\right],$$

получим:

$$c_4 = \frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{4}\sigma\big[[-1] \times [-1]\big]$$

$$+ \frac{1}{4}\sigma\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\sigma\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{2!} & -1 \end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\right]$$

$$= -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sigma\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4}\sigma\begin{bmatrix} \frac{1}{3!} & -\frac{1}{2!} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$c_4 = -\frac{1}{4}.$$

Отыскание коэффициента c_5.

Полагая в формуле (3.4.11) $n = 4$, получим:

$c_5 = \frac{1}{5}a_{4,0} + \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{4}\sigma\big[A_{4-k,S_k} \times C_k\big].$

Принимая во внимание, что

$$X_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

найдем матрицу

$$C_4=\begin{bmatrix} c_1^4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3{c_1}^2c_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2c_1c_3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & {c_2}^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Принимая во внимание, что

$$A_{3,S_1}=[a_{3,1}]=[-1],\ A_{2,S_2}=[a_{2,2}\quad a_{2,1}]=\left[-\frac{1}{2!}\quad -1\right],$$

$$A_{1,S_3}=[a_{1,3}\quad a_{1,2}\ a_{1,1}]=\left[-\tfrac{1}{3!}\quad -\tfrac{1}{2!}\quad -1\right],$$

$$A_{0,S_4}=[a_{0,4}\quad a_{0,3}\ a_{0,2}\ a_{0,2}\ a_{0,1}]=\left[-\tfrac{1}{4!}\quad -\tfrac{1}{3!}\quad -\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{2!}\quad -1\right],$$

получим:

$$c_5=\frac{1}{5}a_{4,0}+\frac{1}{5}\sigma\left[A_{3,S_1}\times C_1\right]+\frac{1}{5}\sigma\left[A_{2,S_2}\times C_2\right]+\frac{1}{5}\sigma\left[A_{1,S_3}\times C_3\right]+$$

$$+\frac{1}{5}\sigma\left[A_{0,S_4}\times C_4\right]$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\sigma\left[[-1]\times[-1]\right]$$

$$+\frac{1}{5}\sigma\left[\begin{bmatrix}-\frac{1}{2!} & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right]$$

$$+\frac{1}{5}\sigma\left[\begin{bmatrix}-\frac{1}{3!} & -\frac{1}{2!} & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\right]$$

$$+\frac{1}{5}\left[\sigma\begin{bmatrix}-\frac{1}{4!} & -\frac{1}{3!} & -\frac{1}{2!} & -\frac{1}{2!} & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\right]$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sigma\begin{bmatrix} -\frac{1}{2!} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$+ \frac{1}{5}\sigma\begin{bmatrix} \frac{1}{3!} & -\frac{1}{2!} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$+ \frac{1}{5}\sigma\begin{bmatrix} -\frac{1}{4!} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}.$$

$$c_5 = -\frac{1}{5}.$$

Принимая во внимание, что первый коэффициент разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена равен -1, $(c_1 = -1,)$ для отыскания коэффициентов c_2, c_3, c_4 и c_5, мы пользовались формулой (3.4.11). Формула (3.4.11) содержит n слагаемых. Найдя коэффициенты c_2, c_3, c_4 и c_5 мы показали, что эти коэффициенты определяются суммой первых двух слагаемых, входящих в формулу (3.4.11), сумма же остальных $n-2$ слагаемых равна нулю, $n = 3{,}4{,}5$. Мы показали, что если $n \leq 5$, то

$$c_n = -\frac{2}{n} + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \tag{3.5.44}$$

Пусть для любого натурального n коэффициент c_n определяется согласно (3.5.44), тогда сумма остальных $n-2$ слагаемых, входящих в выражение, определяющее этот коэффициент, будет равна нулю и разложение искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид.

$$Z(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n. \tag{3.5.45}$$

Из (3.4.45) следует, что

$$Z(t) = \ln(1-t).$$

Поскольку $Z(t) = \ln(1-t)$ является единственным решением задачи Коши (3.5.39), (3.5.40), коэффициенты разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена определяются по формуле (3.5.44).

Второе решение.

Полагая $Z_1(t) = t, Z_2(t) = Z(t)$, задачу Коши (3.5.39), (3.5.40), запишем как задачу Коши для автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Z_1{}'(t) = 1 \\ Z_2{}'(t) = 1 - \frac{e^{Z_2}+1}{1-Z_1} \end{cases} \tag{3.5.46}$$

$$\left(Z_1(t)\right)_{t=0} = z_1 = 0,\ \left(Z_2(t)\right)_{t=0} = z_2 = 0, \tag{3.5.47}$$

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Поскольку функция $Z_1(t)$ нам известна, $Z_1(t) = t$, будем заниматься отысканием второй, неизвестной функции $Z_2(t)$. Принимая во внимание (3.3.3),будем иметь:

$$Z_2(t) = e^{tD} z_2.$$

Правая часть последнего соотношения представляет собою степенной ряд. Определим первые четыре слагаемых, являющихся членами этого ряда.

Первое слагаемое.

$$tDz_2 = \left[\frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\frac{\partial z_2}{\partial z_2}\right] t = \left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right) t.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим:

$$(Dz_2)_{z_1=0,z_2=0} = -1,$$

$$tDz_2 = -t.$$

Второе слагаемое.

$$\frac{1}{2!}(tD)^2 z_2 = \frac{t^2}{2!} D\left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right) + (1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}) \frac{\partial}{\partial z_2}(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1})\right]\frac{t^2}{2!}$$
$$= \left(-\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2} - \left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right)\frac{t^2}{2!}$$
$$= \left[-\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1} + \frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2} e^{z_2}\right]\frac{t^2}{2!}$$
$$= \left[\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2}(e^{z_2}-1) - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]\frac{t^2}{2!}$$
$$= \left[\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]\frac{t^2}{2!}.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим

$$(D^2 z_2)_{z_1=0,z_2=0} = -1,$$

$$\frac{t^2}{2!}(D^2 z_2)_{z_1=0,z_2=0} = -\frac{1}{2}t^2.$$

Третье слагаемое.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3!}(tD)^3 z_2 &= \frac{t^3}{3!} D\left[\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right] \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right) + (1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}) \frac{\partial}{\partial z_2} (\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1})\right] \frac{t^3}{3!} \\
&= \left[2\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^3} - \frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2} \right. \\
&\quad + \left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\left(\frac{2e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} \right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right)\right] \frac{t^3}{3!} \\
&= \left[2\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^3} - \frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2} + \frac{2e^{z_2}}{(1-z_1)^2} \right. \\
&\quad - \frac{e^{z_2}}{1-z_1} - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1} 2\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} \\
&\quad \left. + \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right] \frac{t^3}{3!} =
\end{aligned}
$$

$$= \left[2\frac{e^{2z_2}-1}{(1-z_1)^3} - \frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2} + \frac{2e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1} - 2\frac{e^{3z_2}}{(1-z_1)^3} - 2\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^3} + \frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} + \frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2}\right]\frac{t^3}{3!}$$

$$= \left[2\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^3} - \frac{2}{(1-z_1)^3} + \frac{3e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1} - 2\frac{e^{3z_2}}{(1-z_1)^3} - 2\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^3}\right]\frac{t^3}{3!}$$

$$= \left[-2\frac{e^{3z_2}+1}{(1-z_1)^3} + 3\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]\frac{t^3}{3!}.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим,

$$(D^3 z_2)_{z_1=0, z_2=0} = -2!,$$

$$\frac{t^3}{3!}(D^3 z_2)_{z_1=0, z_2=0} = -\frac{1}{3}t^3.$$

Четвертое слагаемое.

$$\frac{1}{4!}(tD)^4 z_2 = \frac{t^4}{4!} D\left[-2\frac{e^{3z_2}+1}{(1-z_1)^3} + 3\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial z_2}\left[-2\frac{e^{3z_2}+1}{(1-z_1)^3} + 3\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right] + (1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1})\frac{\partial}{\partial z_2}\left[-2\frac{e^{3z_2}+1}{(1-z_1)^3} + 3\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]\right]\frac{t^4}{4!}$$

$$= \left[-6\frac{e^{3z_2}+1}{(1-z_1)^4} + 6\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^3} - \frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2} + \left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\left[-6\frac{e^{3z_2}}{(1-z_1)^3} + 6\frac{e^{2z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]\right]\frac{t^4}{4!}$$

$$= \left[\frac{6}{(1-z_1)^4}(e^{4z_2}-1) - \frac{6}{(1-z_1)^3}(2e^{3z_2}+e^{2z_2}-e^{z_2}) + \frac{1}{(1-z_1)^2}(6e^{2z_2}+e^{z_2}) - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]\frac{t^4}{4!}.$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ получим

$$(D^4 z_2)_{z_1=0, z_2=0} = -3!,$$

$$\frac{t^4}{4!}(D^4 z_2)_{z_1=0,z_2=0} = -\frac{1}{4}t^4.$$

Найдя первые четыре члена разложения искомой функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена, мы показали, что

$$(D^k z_2)_{z_1=0,z_2=0} = (k-1)!, k = 1,2,3,4,$$

а коэффициенты разложения искомой функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена определяются по формуле:

$$c_k = -\frac{1}{k}, k = 1,2,3,4.$$

Если для любого натурального n

$$c_n = -\frac{1}{n}, n \in N,$$

то разложение функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z_2(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n},$$

а решением задачи Коши (3.5.46), (3.5.47) будут функции

$$Z_1(t) = t \text{ и } Z_2(t) = \ln(1-t).$$

Поскольку эти функции являются решениями рассматриваемой задачи Коши, для любого натурального n будет иметь место равенство

$$(D^n z_2)_{z_1=0,z_2=0} = -(n-1)!.$$

Третье решение.

Воспользовавшись формулой (3.5.4), найдем решение задачи Коши (3.5.46), (3.5.47). Поскольку $Z_1(t) = t$, $c_1{}^{(1)} = 1, c_n{}^{(1)} = 0,$ если $n \geq 2$ и $n \in N$, будем заниматься отысканием решения только второго уравнения, входящего в систему (3.5.46). Для нахождения коэффициентов разложения функции $Z_2(t)$ в ряд Маклорена будем пользоваться формулой (3.5.17)

$$c_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{n+1}\sum_{X_n} \frac{1}{x_1!x_2!\dots x_k!\dots x_n!} \times$$
$$\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\dots\left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n}\theta_2(z_1,z_2), n \in N$$

где $\theta_2(z_1,z_2) = 1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}$ (3.5.48)

Принимая во внимание, что

$$c_1^{(1)} = 1, c_k^{(1)} = 0, \text{если } k \geq 2 \text{ и } k \in N, c_1^{(2)} = -1,$$

получим:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2} \qquad (3.5.49)$$

$$\frac{D_k}{(k+1)!} = c_{k+1}{}^{(2)}\frac{\partial}{\partial z_2}, k \in N, \qquad (3.5.50)$$

Отыскание коэффициента $c_2^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 1$, получим:

$$c_2^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{X_1}\frac{1}{x_1!}D_0\theta_2(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right) - \frac{\partial}{\partial z_2}\left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2} + \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right).$$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, получим:

$$c_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2} + \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right]_{z_1=0, z_2=0} = -\frac{1}{2},$$

$$c_2^{(2)} = -\frac{1}{2}$$

Мы показали, что

$$\left[\sum_{X_1} \frac{1}{x_1!} D_0 \theta_2(z_1, z_2)\right]_{z_1=0, z_2=0} = -1.$$

Отыскание коэффициента $c_3^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 2$, получим:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3} \sum_{X_2} \frac{1}{x_1! x_2!} \left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2} \theta_2(z_1, z_2).$$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^2 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_1}{2!} \theta_2(z_1, z_2)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2 \left(1 - \frac{e^{z_2} + 1}{1 - z_1}\right)\right.$$

$$\left. + c_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}\left(1 - \frac{e^{z_2} + 1}{1 - z_1}\right)\right]$$

$= \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left[-\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^2} + \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right] - \frac{1}{3\,!}\left(-\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right) = \frac{1}{3!}\left[-2\,\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^3} + 2\,\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2}\right].$

Принимая во внимание, что $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ получим:

$$c_3^{(2)} = \frac{1}{3!}\left[-2\,\frac{e^{z_2} + 1}{(1 - z_1)^3} + 2\,\frac{e^{z_2}}{(1 - z_1)^2}\right]_{z_1=0, z_2=0}$$

$$= \frac{1}{3!}(-2!) = -\frac{1}{3},$$

$$c_3^{(2)} = -\frac{1}{3}.$$

Мы показали, что

$$\left[\sum_{X_2} \frac{1}{x_1! x_2!} \left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2} \theta_2(z_1, z_2)\right]_{z_1=0, z_2=0} = -1.$$

Отыскание коэффициента $c_4^{(2)}$.

Полагая в формуле (3.5.17) $n = 3$, получим:

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{X_3} \frac{1!}{x_1! x_2! x_3!} \left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1} \left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2} \left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3} \theta_2(z_1, z_2).$$

Выполняя суммирование по строкам матрицы

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим:

$$c_4^{(2)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^3 \theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_0}{1!}\frac{D_1}{2!}\theta_2(z_1, z_2) + \frac{D_2}{3!}\theta_2(z_1, z_2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)^3 \left(1 - \frac{e^{z_2} + 1}{1 - z_1}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right) c_2^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}\left(1 - \frac{e^{z_2} + 1}{1 - z_1}\right) + c_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_2}\left(1 - \frac{e^{z_2} + 1}{1 - z_1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(-2\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^3} + 2\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2} - \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial z_2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z_2}\left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(1 - \frac{e^{z_2}+1}{1-z_1}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3!}\left(-6\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^4} + 6\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^3} - 3\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2} + \frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right) - \right.\right.$$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2}+\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\right)\Big]=\frac{1}{4!}\Big[-6\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^4}+$
$6\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^3}-3\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2}+\frac{e^{z_2}}{1-z_1}+2\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\Big].$

Принимая во внимание, что $z_1=0$ и $z_2=0$, получим:

$$c_4^{(2)}=\frac{1}{4!}\Big[-6\frac{e^{z_2}+1}{(1-z_1)^4}+6\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^3}-3\frac{e^{z_2}}{(1-z_1)^2}+3\frac{e^{z_2}}{1-z_1}\Big]_{z_1=0,z_2=0}=\frac{1}{4!}(-3!)=-\frac{1}{4}.$$

$$c_4^{(2)}=-\frac{1}{4}.$$

Мы показали, что

$$\left[\sum_{X_3}\frac{1}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\left(\frac{D_2}{3!}\right)^{x_3}\theta_2(z_1,z_2)\right]_{z_1=0,z_2=0}=-1.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущих двух решениях рассматриваемой задачи Коши, получим :

$$\left[\sum_{X_n}\frac{1}{x_1!\,x_2!\dots x_k!\dots x_n!}\times\left(\frac{D_0}{1!}\right)^{x_1}\left(\frac{D_1}{2!}\right)^{x_2}\dots\left(\frac{D_k}{(k+1)!}\right)^{x_{k+1}}\dots\left(\frac{D_{n-1}}{n!}\right)^{x_n}\theta_2(z_1,z_2)\right]_{z_1=0,z_2=0}=-1.$$

§6. Отыскание решений задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений.

В этом параграфе третьей главы рассмотрим два интегро-дифференциальных уравнения и найдем решения задачи Коши для этих уравнений.

Пример 1.

Решить задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{1}{t-1} - \frac{t^4}{3} + \frac{t^5}{4} + \int_0^t t\tau^2 e^{Z(\tau)} d\tau \qquad (3.6.1)$$

$$[Z(t)]_{t=0} = z = 0 \qquad (3.6.2)$$

Решение.

Найдем коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена. Из (3.6.1) следует, что $c_1 = -1$.

Нахождение коэффициента c_2.

Для нахождения коэффициента c_2 продифференцируем обе части уравнения (3.6.1) по t. Имеем:

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} = -\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{4}t^4 + \int_0^t \tau^2 e^{Z(\tau)} d\tau + t^3 e^{Z(t)} \qquad (3.6.3)$$

Полагая $t = 0$, получим:

$$\left[\frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right]_{t=0} = -1,$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Нахождение коэффициента c_3.

Для нахождения коэффициента c_3

продифференцируем обе части уравнения (3.6.3) по t. Имеем:

$$\frac{d^3Z(t)}{dt^3} = \frac{2!}{(t-1)^3} - 4t^2 + 5t^3 + 4t^2e^{Z(t)} + t^3e^{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} \tag{3.6.4}$$

Полагая $t = 0$, получим:

$$\left[\frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right]_{t=0} = -2!,$$

$$c_3 = -\frac{2!}{3!} = -\frac{1}{3}.$$

Нахождение коэффициента c_4.

Для нахождения коэффициента c_4 продифференцируем обе части уравнения (3.6.4) по t. Имеем:

$$\frac{d^4Z(t)}{dt^4} = -\frac{3!}{(t-1)^4} - 8t + 15t^2 + 8te^{Z(t)} + 4t^2e^{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} + 3t^2e^{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} + t^3\left[e^{Z(t)}\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + e^{Z(t)}\frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right] = -\frac{3!}{(t-1)^4} - 8t + 15t^2 + e^{Z(t)}\left[8t + 4t^2\frac{dZ(t)}{dt} + 7t^2\frac{dZ(t)}{dt} + t^3\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + \frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right)\right].$$

$$\frac{d^4Z(t)}{dt^4} = -\frac{3!}{(t-1)^4} - 8t + 15t^2 + e^{Z(t)}\left[8t + 11t^2\frac{dZ(t)}{dt} + t^3\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + \frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right)\right] \tag{3.6.5}$$

Полагая $t = 0$, получим:

$$\left[\frac{d^4Z(t)}{dt^4}\right]_{t=0} = -3!,$$

$$c_4 = -\frac{3!}{4!} = -\frac{1}{4}.$$

Нахождение коэффициента c_5.

Для нахождения коэффициента c_5 продифференцируем обе части уравнения (3.6.5) по t. Имеем:

$$\frac{d^5Z(t)}{dt^5} = \frac{4!}{(t-1)^5} - 8 + 30t + e^{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt}\left[8t + 11t^2\frac{dZ(t)}{dt} + t^3\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + \frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right)\right] + e^{Z(t)}\left[8 + 22t\frac{dZ(t)}{dt} + 11t^2\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + 3t^2\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + \frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right) + t^3\left(2\frac{dZ(t)}{dt}\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right)\right] = \frac{4!}{(t-1)^5} - 8 + 30t + e^{Z(t)}\left[8t\frac{dZ(t)}{dt} + 11t^2\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + t^3\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^3 + \frac{dZ(t)}{dt}\frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right) + 8 + 22t\frac{dZ(t)}{dt} + 11t^2\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + 3t^2\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + \frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right) + t^3\left(2\frac{dZ(t)}{dt}\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right)\right] = \frac{4!}{(t-1)^5} - 8 + 30t + e^{Z(t)}\left[8 + 30t\frac{dZ(t)}{dt} + 14t^2\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + 14t^2\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + t^3\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^3 + 3\frac{dZ(t)}{dt}\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right)\right].$$

$$\frac{d^5Z(t)}{dt^5} = \frac{4!}{(t-1)^5} - 8 + 30t + e^{Z(t)}\left[8 + 30t\frac{dZ(t)}{dt} + 14t^2\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + 14t^2\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2 + t^3\left(\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^3 + 3\frac{dZ(t)}{dt}\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right)\right]. \tag{3.6.6}$$

Полагая в (3.3.6) $t = 0$, получим:

$$\left[\frac{d^5Z(t)}{dt^5}\right]_{t=0} = -4!,$$

$$c_5 = -\frac{4!}{5!} = -\frac{1}{5}.$$

Найдя первые пять коэффициентов разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена, мы показали, что производные по t искомой функции $Z(t)$ k-того порядка, $1 \leq k \leq 5$, представляются конечными суммами. Вычисляя эти суммы при $t = 0$, мы показали, что каждая из этих сумм определяется только певым слагаемым, сумма же всех остальных слагаемых равна нулю. Мы показали, что

$$\left[\frac{d^k Z(t)}{dt^k}\right]_{t=0} = -(k-1)!, k = 1,2,3,4,5,$$

а первые пять коэффициентов разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена определяются по формуле:

$$c_k = -\frac{1}{k}, k = 1,2,3,4,5.$$

Покажем, что для любого натурального числа n будет иметь место равенство:

$$\left[\frac{d^n Z(t)}{dt^n}\right]_{t=0} = -(n-1)!, n \in N. \tag{3.6.7}$$

Если для любого натурального n имеет место равенство (3.6.7), то коэффициенты разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена определяются по формуле

$$c_n = -\frac{1}{n}, n \in N \tag{3.6.8}$$

и разложение искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}. \tag{3.6.9}$$

Из (3.6.9) следует, что $Z(t) = \ln(1-t)$, и, поскольку эта функция является единственным решением задачи Коши (3.6.1), (3.6.2), то соотношения (3.6.7) и (3.6.8) имеют место для любого натурального n.

Пример 2.

Решить задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{1}{2}e^{2t} + 3e^t - t - \frac{3}{2} + \int_0^t [Z(\tau)]^2 d\tau, \quad (3.6.10)$$

$$[Z(t)]_{t=0} = z = 0 \quad (3.6.11)$$

Решение.

Найдем коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена.

Из (3.6.10) следует, что

$$\left[\frac{dZ(t)}{dt}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_1 = 1.$$

Нахождение коэффициента c_2.

Для нахождения коэффициента c_2 продифференцируем обе части уравнения (3.6.10) по t. Имеем:

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} == -e^{2t} + 3e^t - 1 + [Z(t)]^2 \quad (3.6.12)$$

Из (3.6.12) следует, что

$$\left[\frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}.$$

Нахождение коэффициента c_3.

Для нахождения коэффициента c_3 продифференцируем обе части уравнения (3.6.12) по t. Имеем:

$$\frac{d^3Z(t)}{dt^3} = -2e^{2t} + 3e^t + 2Z(t)\frac{dZ(t)}{dt} \qquad (3.6.13)$$

Из (3.6.13) следует, что

$$\left[\frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}.$$

Нахождение коэффициента c_4.

Для нахождения коэффициента c_4 продифференцируем обе части уравнения (3.6.13) по t. Имеем:

$$\frac{d^4Z(t)}{dt^4} = -2^2e^{2t} + 3e^t + 2\left[\frac{dZ(t)}{dt}\right]^2 + 2Z(t)\frac{d^2Z(t)}{dt^2} \qquad (3.6.14)$$

Из (3.6.14) следует, что

$$\left[\frac{d^4Z(t)}{dt^4}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_4 = \frac{1}{4!}.$$

Примем во внимание, что если n – натуральное число, то

$$\frac{d^{n+2}Z(t)}{dt^{n+2}} = -2^n e^{2t} + 3e^t + \frac{d^n[Z(t)]^2}{dt^n}. \qquad (3.6.15)$$

Воспользовавшись формулой (2.1.9), последнее соотношение (3.6.15) запишем так:

$$\left[\frac{d^{n+2}Z(t)}{dt^{n+2}}\right]_{t=0} = [-2^n e^{2t} + 3e^t]_{t=0} +$$
$$\sum_{X_n} \frac{n!}{x_1!\ldots x_j!\ldots x_n!} {c_1}^{x_1} \ldots {c_j}^{x_j} \ldots {c_n}^{x_n} \left[\frac{d^{S_n}Z^2}{dZ^{S_n}}\right]_{t=0}. \qquad (3.6.16)$$

Отыскание коэффициента c_5.

Полагая в формуле (3.6.16) $n = 3$, получим:

$$\left[\frac{d^5 Z(t)}{dt^5}\right]_{t=0} = -8 + 3 +$$
$$\sum_{X_3} \frac{3!}{x_1!x_2!x_3!} {c_1}^{x_1} {c_2}^{x_2} {c_3}^{x_3} \left[\frac{d^{S_3}Z^2}{dZ^{S_3}}\right]_{t=0}.$$

В результате суммирования по строкам матрицы

$$X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получается три слагаемых и только одно из них отлично от нуля. Слагаемое, получающееся в результате суммирования по второй строке матрицы X_3, сумма элементов которой равна двум, будет отличным от нуля. Имеем:

$$\left[\frac{d^5 Z(t)}{dt^5}\right]_{t=0} = -8 + 3 + \frac{3!}{1! \cdot 1!} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$\left[\frac{d^5 Z(t)}{dt^5}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_5 = \frac{1}{5!}.$$

Отыскание коэффициента c_6.

Полагая в формуле (3.6.16) $n = 4$, получим:

$$\left[\frac{d^6 Z(t)}{dt^6}\right]_{t=0} = -16 + 3 + \sum_{X_4} \frac{4!}{x_1! x_2! x_3! x_4!} {c_1}^{x_1} {c_2}^{x_2} {c_3}^{x_3} {c_4}^{x_4} \left[\frac{d^{S_4} Z^2}{dZ^{S_4}}\right]_{t=0}. \tag{3.6.17}$$

В результате суммирования по строкам матрицы

$$X_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

получается пять слагаемых, из которых два отличны от нуля. Отличными от нуля слагаемыми будут слагаемые, получающиеся в результате суммирования по третьей и четвертой строкам матрицы X_4. Из (3.6.17) следует, что в результате суммирования по строкам матрицы X_4, получим:

$$\left[\frac{d^6 Z(t)}{dt^6}\right]_{t=0} = -16 + 3 + \frac{4!}{1! \cdot 1!} 1 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 2 + \frac{4!}{2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2$$
$$= -16 + 3 + 8 + 6 = 1,$$

$$\left[\frac{d^6 Z(t)}{dt^6}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_6 = \frac{1}{6!}.$$

Отыскание коэффициента c_7.

Полагая в формуле (3.6.16) $n = 5$, получим:

$$\left[\frac{d^7 Z(t)}{dt^7}\right]_{t=0} = -32 + 3 +$$
$$\sum_{X_5} \frac{5!}{x_1! x_2! x_3! x_4! x_5!} {c_1}^{x_1} {c_2}^{x_2} {c_3}^{x_3} {c_4}^{x_4} {c_5}^{x_5} \left[\frac{d^{S_5} Z^2}{dZ^{S_5}}\right]_{t=0}. \tag{3.6.18}$$

В результате суммирования по строкам матрицы

$$X_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

получается семь слагаемых, из которых два отличны от нуля. Отличными от нуля слагаемыми будут слагаемые, получающиеся в результате суммирования по пятой и шестой строкам матрицы X_5 . Из (3.6.18) следует, что в результате суммирования по строкам матрицы X_5, получим:

$$\left[\frac{d^7 Z(t)}{dt^7}\right]_{t=0} = -32 + 3 + \frac{5!}{1! \cdot 1!} 1 \cdot \frac{1}{4!} \cdot 2 + \frac{5!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3!} \cdot 2 = -32 + 3 + 10 + 20 = 1,$$

$$\left[\frac{d^7 Z(t)}{dt^7}\right]_{t=0} = 1,$$

$$c_7 = \frac{1}{7!}.$$

Покажем, что для любого натурального числа $n \in N$

$$\left[\frac{d^n Z(t)}{dt^n}\right]_{t=0} = 1, n \in N \tag{3.6.19}$$

Если соотношение (3.6.19) имеет место для любого натурального числа n , то для любого натурального числа n коэффициенты разложения искомой функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будут определяться по формуле

$$c_n = \frac{1}{n!}, n \in N \tag{3.6.20}$$

и разложение функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n. \tag{3.6.21}$$

Из (3.6.21) следует, что $Z(t) = e^t - 1$ и поскольку эта функция является единственным решением рассматриваемой задачи Коши (3.6.10), (3.6.11), то соотношения (3.6.19) и (3.6.20) имеют место для любого натурального n.

§7. Отыскание решений нелинейных интегральных уравнений.

В этом последнем параграфе рассматривается нелинейное интегральное уравнение Вольтерровского типа

$$Z(t) = \theta(t) + J(t), \tag{3.7.1}$$

где $Z(t)$ - искомая функция, $\theta(t)$ - известная функция, а

$J(t)=\int_0^t K[t,\tau,Z(\tau)]d\tau$, t и τ – комплексные переменные. Функции $Z(t)$ и $\theta(t)$ - голоморфные функции в окрестности точки $t=0$,

$$[Z(t)]_{t=0}=z=0. \qquad (3.7.2)$$

Функция $K[t,\tau,Z(\tau)]$ - голоморфная функция в окрестности точки (0;0;0).

Пример 1.

Найти решение нелинейного интегрального уравнения

$$Z(t)=e^t(-2t^2+5)+8e^{2t}(t-1)+e^{3t}(-2t+1)+2+\int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau \qquad (3.7.3)$$

Здесь $\theta(t)=e^t(-2t^2+5)+8e^{2t}(t-1)+e^{3t}(-2t+1)+2$, (3.7.4)

$$J(t)=\int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau \qquad (3.7.5)$$

Решение.

Пусть разложения функции $Z(t)$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$Z(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \qquad (3.7.6)$$

где $c_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n Z(t)}{dt^n}\right]_{t=0}, n=0,1,2,\ldots,$

$c_0=[Z(t)]_{t=0}=0.$

Отыскание коэффициента c_1.

Продифференцировав функцию $\theta(t)$, получим:

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=e^t(-2t^2-4t+5)+e^{2t}(16t-8)+e^{3t}(-6t+1).$$

Принимая во внимание формулу (2.3.5’) и полагая $n = 1$, получим:

$\frac{dJ(t)}{dt} = \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau + e^t t Z^2(t),$

$\frac{dZ(t)}{dt} = e^t(-2t^2 - 4t + 5) + e^{2t}(16t - 8) + e^{3t}(-6t + 1) + \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau + e^t t Z^2(t).$

$$\left[\frac{dZ(t)}{dt}\right]_{t=0} = -2,$$

$$c_1 = -2.$$

Отыскание коэффициента c_2.

Продифференцировав функцию $\frac{d\theta(t)}{dt}$, получим:

$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = e^t(-2t^2 - 8t + 1) + e^{2t}32t + e^{3t}(-18t - 3).$

Принимая во внимание формулу (2.3.5’) и полагая $n = 2$, а также учитывая, что

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, D_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau},$$

получим:

$$\frac{d^2J(t)}{dt^2} = \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} \sum_{X_{i-1-j}} \frac{(i-1-j)!}{x_{i-1-j}!} \times \left(\frac{1}{(i-1-j)!} \cdot \frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_{i-1-j}} \frac{\partial^{S_{i-1-j}}}{\partial Z^{S_{i-1-j}}} (D_\tau + D_t)^j D_t^{2-i} e^t \cdot \tau \cdot Z^2 =$$

$$= \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau)d\tau + D_t e^t \tau Z^2(\tau) + \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} \sum_{X_{1-j}} \frac{(1-j)!}{x_{1-j}!}$$

$$\times \left(\frac{1}{(1-j)!} \cdot \frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_{1-j}} \frac{\partial^{S_{1-j}}}{\partial Z^{S_{1-j}}} (D_\tau + D_t)^j e^t \cdot Z^2$$

$$= \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau)d\tau +$$

$$+e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) + \sum_{X_1} \frac{1}{x_1!}\left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1} \frac{\partial}{\partial Z} e^t \cdot \tau \cdot Z^2$$

$$+ (D_\tau + D_t) e^t \cdot \tau \cdot Z^2 =$$

$$= \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau)d\tau + e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) + 2e^t \cdot \tau \cdot Z(\tau) \frac{dZ(\tau)}{d\tau}$$

$$+ e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) \ + e^t \cdot Z^2(\tau).$$

Полагая $\tau = t$, получим:

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} = \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau)d\tau + e^t \left[2tZ^2(t) + Z^2(t) + 2tZ(t)\frac{dZ(t)}{dt}\right].$$

Складывая найденные производные второго порядка, получим:

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{d^2 J(t)}{dt^2}$$
$$= e^t(-2t^2 - 8t + 1) + e^{2t} 32t$$
$$+ e^{3t}(-18t - 3) +$$

$$+\int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau$$

$$+e^t\left[2tZ^2(t)+Z^2(t)+2tZ(t)\frac{dZ(t)}{dt}\right],$$

$$\left[\frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right]_{t=0}=1-3=-2,$$

$$c_2=\frac{1}{2!}(-2).$$

Отыскание коэффициента c_3.

Продифференцировав функцию $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$, получим:

$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3}=e^t(-2t^2-12t-7)+e^{2t}(64t+32)+e^{3t}(-54t-27).$

Принимая во внимание формулу (2.3.5') и полагая $n=3$, получим:

$$\frac{d^3J(t)}{dt^3}=\int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i-1}{j}\sum_{X_{i-1-j}}\frac{(i-1-j)!}{x_1!\,x_{i-1-j}!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{(i-1-j)!}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{d^2Z(t)}{d\tau^2}\right)^{x_{i-1-j}}\frac{\partial^{S_{i-1-j,k}}}{\partial Z^{S_{i-1-j,k}}}(D_\tau$$

$$+D_t)^jD_t^{3-i}e^t\cdot\tau\cdot Z^2=$$

$$\int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau + e^t\tau Z^2(\tau) + \sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\sum_{X_{1-j}}\frac{(1-j)!}{x_{1-j}!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1-j)!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_{1-j}}\frac{\partial^{S_{1-j}}}{\partial Z^{S_{1-j}}}(D_\tau + D_t)^j D_t e^t\tau\cdot Z^2$$

$$+\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\sum_{X_{2-j}}\frac{(2-j)!}{x_1!\,x_{2-j}!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{(2-j)!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\right)^{x_{2-j}}\frac{\partial^{S_{2-j,k}}}{\partial Z^{S_{2-j,k}}}(D_\tau$$

$$+D_t)^j e^t\tau\cdot Z^2 = \int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau +$$

$$+e^t\cdot\tau\cdot Z^2(\tau) + \sum_{X_1}\frac{1}{x_1!}\left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\frac{\partial}{\partial Z}e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$

$$+e^t\tau Z^2 + e^t\cdot Z^2$$

$$+\sum_{X_2}\frac{2}{x_1!\,x_2!}\left(\frac{1}{1!}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\right)^{x_2}\frac{\partial^{S_{2,k}}}{\partial Z^{S_{2,k}}}e^t\cdot\tau$$

$$\cdot Z^2$$

$$+2\sum_{X_1}\frac{1!}{x_1!}\left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\frac{\partial^{S_1}}{\partial Z^{S_1}}(D_\tau$$

$$+D_t)e^t\cdot\tau\cdot Z^2 + (D_\tau + D_t)^2 e^t\cdot\tau\cdot Z^2 =$$

$$= \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau + e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) + 2e^t \cdot \tau \cdot Z(\tau) \frac{dZ(\tau)}{d\tau}$$
$$+ e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) \ + e^t \cdot Z^2(\tau)$$
$$+ \frac{2!}{2!} \left(\frac{1}{1!} \cdot \frac{dZ(\tau)}{d\tau} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} e^t \tau Z^2 + \frac{2!}{1!}$$
$$\cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2 Z(\tau)}{d\tau^2} \frac{\partial}{\partial Z} e^t \cdot \tau \cdot Z^2$$
$$+ 2 \frac{dZ(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial Z} (D_\tau + D_t) e^t \cdot \tau \cdot Z^2 + e^t \cdot \tau$$
$$\cdot Z^2 + 2e^t \cdot Z^2 =$$

$$= \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau + e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) + 2e^t \cdot \tau \cdot Z(\tau) \frac{dZ(\tau)}{d\tau}$$
$$+ e^t \cdot \tau \cdot Z^2(\tau) \ + e^t \cdot Z^2(\tau)$$
$$+ 2e^t \tau \left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau} \right)^2 + 2 \cdot e^t \cdot \tau Z(\tau) \frac{d^2 Z(\tau)}{d\tau^2}$$
$$+ 4e^t \cdot \tau \cdot Z(\tau) \frac{dZ(\tau)}{d\tau} + 4e^t Z(\tau) \frac{dZ(\tau)}{d\tau}$$
$$+ e^t \cdot \tau Z^2(\tau) + 2e^t \cdot Z^2(\tau).$$

Полагая $\tau = t$, получим:

$$\frac{d^3 J(t)}{dt^3} = \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau + e^t \Bigg[3tZ^2(t) + 3Z^2(t) + 6tZ(t) \frac{dZ(t)}{d\tau} + 4Z(t) \frac{dZ(t)}{dt} + 2t \left(\frac{dZ(t)}{dt} \right)^2 + 2tZ(t) \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} \Bigg]. \tag{3.7.7}$$

Складывая найденные производные третьего порядка, получим:

$$\frac{d^3 Z(t)}{dt^3} = \frac{d^3 \theta(t)}{dt^3} + \frac{d^3 J(t)}{dt^3}$$
$$= e^t(-2t^2 - 12t - 7) + e^{2t}(64t + 32)$$
$$+ e^{3t}(-54t - 27) +$$

$$+\int_0^t e^t\tau Z^2(\tau)d\tau$$

$$+e^t\left[3tZ^2(t)+3Z^2(t)+6tZ(t)\frac{dZ(t)}{dt}\right.$$

$$+4Z(t)\frac{dZ(t)}{dt}+2t\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2$$

$$\left.+2tZ(t)\frac{d^2Z(t)}{dt^2}\right],$$

$$\left[\frac{d^3Z(t)}{dt^3}\right]_{t=0}=-7+32-27=-2,$$

$$c_3=\frac{1}{3!}(-2).$$

Отметим важное свойство, которым будем в дальнейшем пользоваться. Отметим, что при нахождении $\frac{d^nJ(t)}{dt^n}$ можно пользоваться результатом, полученным для $\frac{d^{n-1}J(t)}{dt^{n-1}}, n\geq 2, n\in N$. Например, при нахождении $\frac{d^3J(t)}{dt^3}$ можно было бы воспользоваться результатом, полученным при нахождении $\frac{d^2J(t)}{dt^2}$ и к этому результату добавить сумму

$$\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}\sum_{X_{2-j}}\frac{(2-j)!}{x_1!\,x_{2-j}!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{(2-j)!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\right)^{x_{2-j}}\frac{\partial^{S_{2-j,k}}}{\partial Z^{S_{2-j,k}}}(D_\tau$$

$$+D_t)^j e^t\tau\cdot Z^2=$$

$$=2e^t\tau\left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^2+2e^t\tau Z(\tau)\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}$$

$$+4e^t\tau Z(\tau)\frac{dZ(\tau)}{d\tau}+$$

$$+4e^tZ(\tau)\frac{dZ(\tau)}{d\tau}+e^t\cdot\tau\cdot Z^2(\tau)+2e^t\cdot Z^2(\tau),$$

положив в этой сумме $\tau=t$.

Отыскание коэффициента c_4.

Продифференцировав функцию $\frac{d^3\theta(t)}{dt^3}$, получим:

$$\frac{d^4\theta(t)}{dt^4}=e^t(-2t^2-16t-19)+e^{2t}(128t+128)+e^{3t}(-162t-135). \quad (3.7.8)$$

Примем во внимание формулу (2.3.5’) и положим в этой формуле $n=4$. Нахождению $\frac{d^4J(t)}{dt^4}$ предпошлем нахождение суммы

$$\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\sum_{X_{3-j}}\frac{(3-j)!}{x_1!\dots x_{3-j}!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\dots\left(\frac{1}{(3-j)!}\frac{d^{3-j}Z(\tau)}{d\tau^{3-j}}\right)^{x_{3-j}}\frac{\partial^{S_{3-j,k}}}{\partial Z^{S_{3-j,k}}}(D_\tau$$
$$+D_t)^j e^t\tau\cdot Z^2$$
$$=\sum_{X_3}\frac{3!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\right)^{x_2}\left(\frac{1}{3!}\frac{d^3Z(\tau)}{d\tau^3}\right)^{x_3}\frac{\partial^{S_{3,k}}}{\partial Z^{S_{3,}}}$$
$$\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$+3\sum_{X_2}\frac{2!}{x_1!\,x_2!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\right)^{x_2}\frac{\partial^{S_{2,k}}}{\partial Z^{S_{2,k}}}(D_\tau$$
$$+D_t)e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$+3\sum_{X_1}\frac{1!}{x_1!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^{x_1}\frac{\partial}{\partial Z}(D_\tau+D_t)^2e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$+(D_\tau+D_t)^3e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$=\frac{3!}{3!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^3\frac{\partial^3}{\partial Z^3}e^t\cdot\tau\cdot Z^2+$$
$$+\frac{3!}{1!\,1!}\cdot\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\frac{1}{2!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial Z^2}e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$+\frac{3!}{1!}\cdot\frac{1}{3!}\frac{d^3Z(\tau)}{d\tau^3}\frac{\partial}{\partial Z}e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$+3\frac{2!}{2!}\left(\frac{1}{1!}\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial Z^2}(D_\tau+D_t)e^t\cdot\tau$$
$$\cdot Z^2+3\cdot\frac{2!}{1!}\frac{1}{2!}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\frac{\partial}{\partial Z}(D_\tau+D_t)e^t\cdot\tau$$
$$\cdot Z^2+3\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\frac{\partial}{\partial Z}(D_\tau+D_t)^2e^t\cdot\tau\cdot Z^2$$
$$+(D_\tau+D_t)^3e^t\cdot\tau\cdot Z^2=$$

$$= 3\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}2e^t\cdot\tau + 2\frac{d^3Z(\tau)}{d\tau^3}e^t\cdot\tau\cdot Z(\tau)$$
$$+ 3\left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial Z^2}(e^t\cdot\tau\cdot Z^2 + e^t\cdot Z^2)$$
$$+ 3\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2}\frac{\partial}{\partial Z}(e^t\cdot\tau\cdot Z^2 + e^t\cdot Z^2)$$
$$+ 3\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\frac{\partial}{\partial Z}(e^t\cdot\tau\cdot Z^2 + 2e^t\cdot Z^2) + e^t$$
$$\cdot\tau\cdot Z^2(\tau) + 3e^tZ^2(\tau) =$$

$$= 6e^t\cdot\tau\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2} + 2e^t\cdot\tau\cdot Z(\tau)\frac{d^3Z(\tau)}{d\tau^3} + 6e^t$$
$$\cdot\tau\left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^2 + 6e^t\left(\frac{dZ(\tau)}{d\tau}\right)^2 + 6e^t\cdot\tau$$
$$\cdot Z(\tau)\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2} + 6e^tZ(\tau)\frac{d^2Z(\tau)}{d\tau^2} + 6e^t\cdot\tau$$
$$\cdot Z(\tau)\frac{dZ(\tau)}{d\tau} + 12e^t\cdot Z(\tau)\frac{dZ(\tau)}{d\tau} + e^t\cdot\tau$$
$$\cdot Z^2(\tau) + 3e^t\cdot Z^2(\tau).$$

Полагая в найденной сумме $\tau = t$ и прибавляя к ней производную третьего порядка интеграла $J(\tau)$, определенную согласно (3.7.7), получим:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^4 J(t)}{dt^4} = \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau
&+ e^t \Bigg[3t \cdot Z^2(t) + 3 \cdot Z^2(t) + 6t \\
&\cdot Z(t) \frac{dZ(t)}{dt} + 4 \cdot Z(t) \frac{dZ(t)}{dt} \\
&+ 2t \left(\frac{dZ(t)}{dt} \right)^2 + 2 \cdot t \cdot Z(t) \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} \Bigg] \\
&+ e^t \Bigg[6t \frac{dZ(t)}{dt} \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2t \\
&\cdot Z(t) \frac{d^3 Z(t)}{dt^3} + 6t \left(\frac{dZ(t)}{dt} \right)^2 \\
&+ 6 \left(\frac{dZ(t)}{dt} \right)^2 + 6tZ(t) \cdot \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 6Z(t) \\
&\cdot \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 6tZ(t) \frac{dZ(t)}{dt} + 12 Z(t) \frac{dZ(t)}{dt} \\
&+ tZ^2(t) + 3Z^2(t) \Bigg] =
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^t e^t \tau Z^2(\tau) d\tau$$

$$+ e^t \Bigg[4t \cdot Z^2(t) + 6 \cdot Z^2(t) + 12t \cdot Z(t) \frac{dZ(t)}{dt} + 16 \cdot Z(t) \frac{dZ(t)}{dt} + 8t \left(\frac{dZ(t)}{dt} \right)^2 + 8 \cdot t \cdot Z(t) \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 6 \left(\frac{dZ(t)}{dt} \right)^2 + 6Z(t) \cdot \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 6t \frac{dZ(t)}{dt} \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2t \cdot Z(t) \frac{d^3 Z(t)}{dt^3} \Bigg].$$

Принимая во внимание, что производная четвертого порядка функции $\theta(\tau)$ определяется согласно (3.7.8), получим:

$$\frac{d^4 Z(t)}{dt^4} = \frac{d^4 \theta(t)}{dt^4} + \frac{d^4 J(t)}{dt^4} =$$

$$= e^{t}(-2t^2-16t-19)+e^{2t}(128t+128)$$
$$+ e^{3t}(-162t-135)+\int_0^t e^{t}\tau Z^2(\tau)d\tau$$
$$+ e^{t}\Bigg[4t\cdot Z^2(t)+6\cdot Z^2(t)+12t$$
$$\cdot Z(t)\frac{dZ(t)}{dt}+16\cdot Z(t)\frac{dZ(t)}{dt}$$
$$+8t\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2+8\cdot t\cdot Z(t)\frac{d^2Z(t)}{dt^2}$$
$$+6\left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2+6Z(t)\cdot\frac{d^2Z(t)}{dt^2}$$
$$+6t\frac{dZ(t)}{dt}\,\frac{d^2Z(t)}{dt^2}+2t\cdot Z(t)\frac{d^3Z(t)}{dt^3}\Bigg],$$

$$\left[\frac{d^4Z(t)}{dt^4}\right]_{t=0}=-19+128-135+24=-2,$$

$$c_4=\frac{1}{4!}(-2).$$

Покажем, что для любого натурального n имеет место соотношение

$$\left[\frac{d^nZ(t)}{dt^n}\right]_{t=0}=-2, n\in N \qquad (3.7.9)$$

Если соотношение (3.7.9) имеет место для любого натурального n, то разложение функции $Z(t)$ в ряд Маклорена будет иметь вид:

Z(t)=-2 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = 2 - 2e^{t}$.

Поскольку искомая функция

$$Z(t)=2-2e^{t}$$

является решением рассматриваемого интегрального уравнения (3.7.3), то соотношение (3.7.9) будет иметь место для любого натурального n.

Раздел II

Глава 4

О некоторых прописных истинах математики, о реалиях нашей жизни, о русской литературе, о великих ее представителях и о других неординарных людях.

§1. Об истинах математики и других бесспорных истинах.

I

Прежде чем говорить об аксиомах, заметим, что умнейшие люди считали и считают, что «вера не противоречит разуму, а дополняет его» (В.С. Соловьев). В своих глубинных основах математика базируется на аксиомах, которые принимают без доказательства, принимают на веру, и математику можно считать истинным знанием, не отвергающим веру.

Изучавшие математику хорошо знают, что 2+5=5+2 и $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$. Это аксиома, которая принимается без доказательства и называется коммутативным законом для сложения и умножения. Изучавшие математику в институтах знают, что коммутативный закон для умножения выполняется не для всех объектов, рассматриваемых в математике. Например, если A и B – две произвольные матрицы, то, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Всемирно известный немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855) считал математику царицей наук, а великий немецкий философ Эммануил Кант (1724–1804) сказал: «В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней математики». Могила Канта находится в Калининграде и те, кто был на его могиле, говорят, что на могильном камне высечены слова: «Zwei Dinge erfüllen das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht, je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt:Der bestirnte Himmel über mir, und das moralische Gesetz in mir.». Эти слова можно перевести так: «Две реальности наполняют мою душу священным трепетом: звёздное небо, которое надо мною, и Нравственный Закон, который во мне». Эти две реальности говорят человеку о Творце. Звёздное небо над человеком и, по-видимому, трудно найти зрячего человека, который бы ни разу в жизни не взглянул на это звёздное небо. На звёздное небо, которое над нами, человек глядит довольно часто, реже человек заглядывает в свою душу и содеянное подвергает суду своей совести. У человека есть совесть, она не обретается путём обучения в университетах, совесть – Божественное начало в человеке, она – свет Божий в человеке. Считают, что Нравственный Закон, записанный Богом в человеческом сердце, связывает человека с Небесами.

Мы лучше поймём замечательные, глубокие слова Эммануила Канта о нравственном законе, если примем во внимание, что мелкие воры и мошенники - люди не самой безупречной репутации - как правило, тяжких преступлений не совершают. У них есть порог, который они не переступают. Свою совесть, напоминающую им о Нравственном Законе, о котором писал Эммануил Кант, они пытаются лишь усыпить, а не умертвить, и она, просыпаясь, напоминает им об этом законе. Эти люди несравненно лучше тех, кто умертвил свою совесть. Но и среди умертвляющих свою совесть есть такие, которые в глубине души ещё способны дать себе реальную оценку. Считают, что слова: «Аз есьм зверь, но над зверьми и царствую», принадлежат Ивану Грозному. Конечно, найти летопись, подтверждающую, что эти слова принадлежат Ивану Грозному, - трудно, а скорее всего – невозможно. По-видимому, людей, умертвивших свою совесть, всё-таки немного. Если бы это было не так и таких людей было бы очень много, то жить стало бы невозможно. Наш философ Николай Александрович Бердяев, высланный из Советской России в 1922 году, о совести говорит так: «Совесть есть глубина личности, где человек соприкасается с Богом».

Известный польский математик академик Хуго Штейнгаус (1887-1972), учителями которого были великие немецкие математики Давид Гильберт и Феликс Клейн, сказал: «Между духом и материей посредничает математика». На математику можно смотреть как на науку, содержащую идеи, отражающие истину, такими идеями математика пополняется и сегодня. Но слово «ложь» тоже присутствует в математической литературе. В алгебре логики, являющейся разделом математической логики, изучаются операции над высказываниями и рассматриваются два типа высказываний – истинные и ложные. Но ложь в математике нагая и бесправная, там она и на ложь не походит, поскольку сразу представляется: «Я – ложь». В нашей же обыденной жизни она маскируется до неузнаваемости и лишь немногие узнают её. Истинным высказываниям в алгебре логики ставится в соответствие 1 (единица), а ложным 0 (нуль). По-видимому, не случайность, что в алгебре логики, являющейся разделом математики, науки, истины которой не поколебали тысячелетия, лжи даётся нулевая оценка, и та же самая нулевая оценка даётся Фёдором Михайловичем Достоевским атеистическому мировоззрению. Он писал: «Легко сделаться атеистом русскому человеку, легче, чем всем остальным во всём мире! И русские не просто становятся атеистами, а непременно уверуют в атеизм, как в новую веру, ничуть того не замечая, что уверовали в нуль». (Ф. М. Достоевский «Идиот»).

Носителями как лжи, так и атеизма являются люди, и как ложь, так и атеизм имеют для людей большую негативную значимость и являются первопричинами, если не всех, то многих бед и несчастий. Не только Христианство, но и другие мировые мистические религии, ложь считают тяжким грехом. Лгунов Ф. М. Достоевский охарактеризовал следующими четырьмя словами: «Лгут только одни негодяи». Многие атеисты, да, к сожалению, и не только атеисты, считают ложь вполне допустимой. Многие, если не большинство атеистов, не обременяют свою душу понятием греха, они считают себя последователями научного мировоззрения, считают, что атеизм базируется на знании, на самом же деле, он базируется на вере. Он базируется на вере в ложную концепцию (лат. conception – система взглядов). Суть этой концепции раскрывается в Библии: «Рече безумец в сердце своем несть Бог». Русский перевод: «Сказал безумец в сердце своем: «нет Бога»». (См. «Новый Завет и Псалтырь Господа нашего Иисуса Христа». Пс. 13.1).

К сказанному о лжи добавлю об её отношениях с насилием. Александр Исаевич Солженицын в статье «Жить не по лжи», написанной в 1974 году для самиздата, убедительно показывает, что насилие без лжи не может существовать, а ложь не может не опираться на насилие.

Возвращаясь к алгебре логики, заметим, что если бы не было раздела математики, называемого алгеброй логики, то если бы и были в наше время компьютеры, то они, по-видимому, не обладали бы теми возможностями, которыми они обладают сегодня. Первый компьютер Atanasoff-Berry Computer – ABC был собран в США перед войной. Создателями его были профессор математики Джон Атанасов (1903 – 1995) и его аспирант Клиффорд Берри. Современные компьютеры работают в двоичной системе счисления. Идея использовать в быстродействующих вычислительных устройствах двоичную систему счисления принадлежит профессору Атанасову.

Многие понятия, использующиеся в математике, являются абстрактными, идеальными, понятиями из мира идей. В их основе лежит понятие бесконечности. Например, под точкой на плоскости понимается круг бесконечно малого радиуса, и уже идеальную математическую точку на листе бумаги мы поставить не сможем. Не можем мы точно записать и иррациональное число. Например, при записи иррационального числа $\sqrt{2}$ мы можем записать после запятой лишь конечное число десятичных знаков. Если десятичных знаков после запятой n, то мы приближаемся к $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$. То же самое можно сказать и о трансцендентных числах e и π. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Реально мы можем записать лишь конечное приближение к рассматриваемому пределу e. Предельный переход в математике играет исключительно важную роль. Определение предела опирается на понятие бесконечности. Бесконечность, её глубинную суть, по-видимому, ещё не постигло наше сознание.

II

Предельным переходом для человека является смерть. Приведём размышления Ф. М. Достоевского об этом предельном переходе, не включённые ни в одно из собраний его сочинений (см. письмо Достоевского – Врангелю, 31.03-14.04.1865). Размышления Ф. М. Достоевского о смерти содержатся в его записной книжке. Пытаясь постичь суть смерти, он пишет: «Вся история человечества, так отчасти и каждого отдельно, есть только развитие, борьба, стремление и достижение этой цели. Но если это окончательная цель человечества (достигнув которой, ему не надо будет развиваться, т. е. достигать, бороться, прозревать при всех падениях своих идеал и вечно стремиться к нему, - стало быть, не надо будет жить) – то, следовательно, человек есть на земле существо только развивающееся, следовательно, не оконченное, а переходное.

Но достигать такой великой цели, по моему рассуждению, совершенно бессмысленно, если при достижении цели всё угасает и исчезает, т. е. если не будет жизни у человека и по достижении цели. Следовательно, есть будущая, райская жизнь.

Какая она, где она, на какой планете, в каком центре, т. е. в лоне общего синтеза, т. е. Бога? Мы не знаем. Мы знаем только одну черту будущей природы будущего существа, которое вряд ли будет и называться человеком (следовательно, и понятия мы не имеем, какими будем существовать). Эта черта предсказана Христом, - великим и конечным идеалом развития всего человечества, представшим нам, по закону нашей истории, во плоти; эта черта: «Не женятся и не посягают, а живут как Ангелы Божии», черта глубоко замечательная. (Евангельский текст: «Ибо в воскресении мертвых ни женятся, ни выходят замуж, но пребывают, как Ангелы Божии на небесах». Евангелие от Матфея, гл. 22, ст. 30).

В предисловии я уже писал , что если человек достигает святости, то он освобождается от страха смерти , и цитировал слова Апостола Павла . Эти великие слова процитирую ещё раз . Апостол Павел знал , что жизнь человека после смерти тела земного продолжается и знал , что продолжается она в теле небесном , был свободен от страха смерти и свой взгляд на жизнь и смерть выразил в словах : « . . . для меня жизнь – Христос , и смерть – приобретение » . (Послание к филиппийцам святого Апостола Павла , гл . 1 , ст . 21) . Вряд ли кто , из живущих в этом мире, сомневается , что у человека есть земное физическое тело , но не все верят в то , что жизнь человека после смерти продолжится и человек после смерти обретёт тело небесное . Наше земное тело медицина изучает тысячелетия , многого достигла , в наших больницах лечатся очень многие болезни , но и сегодня , мы не можем сказать , что медицина располагает исчерпывающими знаниями о нашем земном теле. О нашем же небесном теле , мы либо не знаем ничего , либо почти ничего . В первом послании к Коринфянам святого Апостола Павла , в пятнадцатой главе , Апостол Павел пишет, что Бог дал человеку земное тело , а после смерти земного тела , даст человеку тело небесное . Зная о том , что после смерти тела земного , человек обретёт тело небесное , Апостол Павел написал : « Есть тела небесные и тела земные : но иная слава небесных , иная земных » . (Первое послание к Коринфянам святого Апостола Павла , гл. 15 , ст . 40). Возможно, что словами « но иная слава небесных , иная земных », Апостол Павел говорит , что у тел небесных и тел земных разные возможности . Я убеждён , что были и есть люди , которые знают о том мире , в который нам предстоит перейти , больше , чем знаем мы . К этим людям относится , известная во всём мире , наша современница Ванга . Ванга не занималась обманом . Если бы она занималась обманом , то к ней бы не ехали люди со всего мира . Очередь , желающих встретиться с Вангой , желающих задать ей вопросы и получить на них ответы , растягивалась на годы . Ванга могла контактировать с умершими родственниками приходивших и приезжавших к ней людей , и видела то , о чём писал Апостол Павел . Ванга видела , что тела небесные обладают возможностями , которыми не обладают тела земные , и могут проходить через стены . В свои молодые годы в дореволюционной литературе я прочитал , что человек , выйдя из тела , иногда , прежде всего , посещает самых близких ему людей . Мой дедушка Николай Никандрович Игумнов жил в Иркутске , а его сестра Ольга Никандровна жила на Урале в городе Сарапуле . Когда у моего дедушки была возможность , он навещал свою сестру , и у него был ключ от её квартиры . Однажды , Ольга Никандровна , придя с работы , вошла в прихожую , открыла дверь в комнату и увидела , что приехал брат , стоит в переднем углу перед иконами и молится Богу . Она решила его не беспокоить , тихонько закрыла дверь , пошла в кухню и стала готовить ужин . Когда ужин был готов , она вошла в комнату , но брата в комнате не было . Прошло немного времени и она получила телеграмму о его смерти . Слова Фёдора Михайловича Достоевского : « . . . человек есть на земле существо только развивающееся , следовательно не оконченное , а переходное . » , - великие слова . Невозможно отрицать то , что человек существо развивающееся и переходное . И при жизни человек неоднократно умирает при переходе от одной ступени развития к другой более высокой . Умирает ребёнок , становясь юношей , умирает и тот волшебный детский мир , в котором он жил . Юноша уже не верит в « настоящего » деда мороза и не верит в то , что зайчик и лисичка могут посылать подарки . Умирает юноша , становясь молодым человеком , умирают и его грёзы и его романтические мечты . Эти переходы человека от одной ступени развития к другой более высокой , оставляют человека в мире , в котором он живёт и радуют и человека и его близких . Эти переходы изменяют человека , человек становится другим , но не принято считать , что человек , которым он был до совершённого им перехода , умер . Совершив в этом мире свой последний , свой предельный переход , человек оставляет этот мир , оставляет тело , оставляет близких , оставляет всё , что он имел в этом мире , и уходит в тот мир , о котором мы очень мало знаем . Этому переходу , чаще всего , предшествует болезнь , продолжительная или непродолжительная , уходят из этого мира и совершенно здоровые люди . Индийская мудрость гласит : « Рождение человека – случайность , а смерть – закон » . Ф.М.Достоевский – глубокий мыслитель и наиболее читаемый в мире писатель, о нём Альберт Эйнштейн говорил, что Достоевский его сделал Эйнштейном. Ф.М. Достоевский был революционером и, когда попал в тюрьму, в свободное время занимался углублённым чтением «Нового Завета». Занимаясь вдумчивым чтением «Нового Завета», он понял, что если нет Бога, то такие понятия, как честь, совесть, долг не только не имеют твёрдой основы, они не имеют смысла. Многие атеисты не отрицают, что не знают того, что знали Ньютон, Паскаль, Декарт, Достоевский, а также не отрицают того, что они сделали для человечества, но отвергают их мировоззрение, считая своё мировоззрение более правильным ещё и потому, что слишком притягательно для них то, о чём говорил Ф.М.Достоевский: «Без Бога всё позволено».

Сегодняшний технический прогресс базируется на результатах научных изысканий, проводившихся в течение столетий. Он базируется, прежде всего, на результатах, полученных в области математики и физики. Сегодня мы можем оценить значимость для человечества людей, открывавших законы физики и создававших глубокие и истинные математические теории. Ещё более значимы для человечества пророки и святые. Степень приближения к истине пророков и святых выше, чем степень приближения к ней учёных. Значимость их слов и наставлений для человечества выше значимости глубоких и истинных утверждений, содержащихся в математике, которые называются теоремами. В истинности только что сказанного убеждают слова Великого Учителя человечества и возлюбленного Сына Божия Иисуса Христа, касающиеся отношений между людьми: **«Итак, во всём, как хотите, чтобы с вами поступали люди, так поступайте и вы с ними; ибо в этом закон и пророки».** (Евангелие от Матфея, гл. 7, ст. 12). Эти великие слова Христа приведены в предисловии, а далее в предисловии говорится, что исполнение одной этой заповеди изменило бы и людей и мир, в котором мы живём, и сделало бы наш мир неузнаваемым. Пусть повторное цитирование этой заповеди обратит внимание читателя на её величие и значимость . Исполнение этой заповеди привело бы человечество в Царствие Божие на Земле.

Наш современник, президент Индии Шри К. Р. Нараянан (1920 – 2005) о значимости для человечества Учения Христа высказался так: «На мой взгляд, проповедь Иисуса о сострадании и любви сегодня очень важна для мира. Иисус пришёл на Землю ради всего мира. Он сделал это не только для христиан, но для всех рас и народов. Его послание всюду достигает человеческих сердец. Его идеи были революционными для Его времени, таковыми они остаются и по сей день».

В советское время большинство учёных придерживалось материалистического мировоззрения, были атеистами, но не все. Советский академик Николай Михайлович Амосов писал: «Без веры в Бога невозможна мораль, хотя все идеологии проповедуют каждая свою мораль. Вечная мораль, которая должна обеспечить человечеству будущее это – проповедь Иисуса Христа». Рассматривая различные идеологии, каждая из которых проповедовала свою мораль, академик Амосов считал, что все эти морали, кроме морали, проповеданной Иисусом Христом, суррогатные. Если Россия обратит серьёзное внимание на слова, сказанные Христом, то сбудется пророчество американского провидца Эдгара Кейси: «Миссия славянских народов состоит в том, чтобы изменить сущность человеческих взаимоотношений, освободить их от эгоизма и грубых материальных страстей, восстановить на новой основе – на любви, доверии и мудрости. Из России в мир придёт надежда – не от коммунистов, не от большевиков, а из свободной России! Пройдут годы, прежде чем это случится, но именно религиозное развитие России и даст миру надежду». (См. «Предсказание Эдгара Кейси о России»).

§2. О мощности множества, об использовании этого понятия для характеристики человеческой личности и о реалиях нашей жизни.

I

Множество – одно из ключевых понятий математики, однако, строгого определения этого понятия нет. Немецкий математик Георг Кантор (03.03.1845–06.01.1918), создавший теорию множеств, определил множество как «единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством» и назвал объекты, входящие в множество, его элементами.

В литературе по теории множеств доказывается, что есть множества более богатые элементами, чем счётное множество N, т. е. что есть множества более высокой мощности, чем множество N, элементами которого являются натуральные числа. Содержащиеся в этих множествах элементы, невозможно перенумеровать. Элементами множества [0;1] являются лишь неотрицательные числа, не превосходящие единицу, но элементы этого множества невозможно перенумеровать, это множество является множеством мощности континуума. Множества мощности континуума задаются путём указания тех свойств, которыми обладают их элементы.

II

После того, как человек приходит в этот мир, начинают заниматься его воспитанием и при формировании человеческой личности многое зависит от того, кто окружает человека, в каком духе его воспитывают и, конечно же, очень многое зависит от мировоззрения родителей, от их нравственного и культурного уровня. Многие люди, в том числе и многие, занимающиеся профессионально воспитанием, или вообще не принимают во внимание или забывают то, что в основе человеческой личности лежит Божественное Начало, которое у обычного человека может быть укутано плотными покрывалами страстей, ложных концепций, а, подчас, и пагубных наклонностей, но Оно – высшее начало в человеке и лежит в основе человеческой личности. По мере развития и совершенствования человека, действие этих покрывал ослабевает, а по достижении высоких ступеней развития, по-видимому, полностью прекращается и сами эти покрывала перестают существовать. Пробуждающееся в человеке его Высшее Божественное Начало возвышает человека и позволяет ему господствовать над своими страстями, чувствами и эмоциями (лат. emovere – возбуждать, волновать). Господство человека над своими страстями, чувствами и эмоциями, освобождает его от порабощения ими (наиболее известные и безысходные виды порабощения: курение, алкоголизм, наркомания). О том , насколько важным для человека является господство , о котором идёт речь , говорит случай , о котором слышал , когда был ещё школьником . Мать готовила картофельное пюре и толкла картошку , а ребёнок досаждал ей и мешал . Она ударила его деревянным толчком по лбу . Причиной удара было вышедшее из под контроля раздражение и на мгновение овладевшее личностью матери . Удар, который был следствием вышедших из под контроля эмоций , оказался смертельным .

По-видимому, слова Христа: «**Царствие Божие внутри вас есть**» (Евангелие от Луки, гл. 17, ст. 21), сказаны Христом в связи с наличием в человеческой личности её вершины, её Божественного Начала.

Всемирно известный французский математик, физик и глубокий мыслитель Блез Паскаль об отношениях Бога с человеком писал так: «Открыто являясь тем, кто ищет Его всем сердцем, и скрываясь от тех, кто всем сердцем бежит от Него, Бог регулирует человеческое знание о Себе. Он делает знаки, видимые для ищущих Его и невидимые для равнодушных к Нему. Тем, кто хочет видеть, Он даёт достаточно света. Тем, кто видеть не хочет, Он даёт достаточно тьмы».

В своём дневнике «Окаянные дни» Иван Алексеевич Бунин пишет: «Народ сам сказал про себя: «Из нас, как из дерева, - и дубина, и икона», - в зависимости от обстоятельств, от того, кто это дерево обрабатывает: Сергий Радонежский или Емелька Пугачёв». Под обработкой дерева, конечно же, понимается воспитание, формирование человеческой личности. Замечу, что дневник «Окаянные дни» не относится к числу широко известных произведений И. А. Бунина, и скажу о нём несколько слов. Он состоит из ежедневных записей событий Февральской и Октябрьской революций. В конце дневника Иван Алексеевич пишет: «Тут обрываются мои одесские заметки. Листки, следующие за этими, я так хорошо закопал в одном месте в землю, что перед бегством из Одессы, в конце января 1920 года, никак не мог найти их». Дневник «Окаянные дни» впервые печатался в течение 1920-х годов на страницах парижской газеты «Возрождение». В нашей стране этот дневник был издан в 1991 году.

Наш философ Борис Петрович Вышеславцев (3.10.1877-5.10.1954), родившийся в Москве и умерший в Женеве писал: «На протяжении всего нашего исследования мы постоянно сталкивались с иерархической структурой человека. Он состоит из ступеней «мёртвой» материи, «живой» материи (тела), из бессознательной души, сознательной души, из Духа и, наконец, из той таинственной вершины, которая составляет его сущность, его вечность, его Богоподобие – из самости, из Атмана, из «глубинного Я», из «сокровенного сердца человека». Мы видим, что человек «микрокосмичен», содержит в себе все элементы космоса, все ступени бытия, он есть стяженное воедино и потенциально – бесконечен, так сказать, во все стороны – вертикально и горизонтально, как крест или сфера. На каждой ступени его существа: в теле, в процессе жизни, в подсознании, в сознании, в творческом духе – раскрывается особая бесконечность и особое «бессмертие». Уже это одно делает совершенно невозможным признать человека конечным и вполне смертным существом. Напротив, в нём живут бесконечности разной мощности». (См. Б. П. Вышеславцев «Вечное в русской философии». Издательство имени Чехова. Нью – Йорк, 1955, глава 14 «Бессмертие, перевоплощение и воскресение»). В процитированных строках Борис Петрович пользуется понятием мощности множества, которое рассматривалось в первой части этой статьи. Уже наше физическое тело, изучением которого медики занимаются тысячелетия, представляет собою не результат слепой случайности, а произведение Могучего Ума. О создании человека Богом говорится в Библии. Приведённое высказывание Б. П. Вышеславцева расширяет наши представления о человеке.

То, о чём говорит Б. П. Вышеславцев, довольно пространно, в Библии говорится всего в нескольких словах. В Библии говорится о величии человека, говорится, что Бог создал человека по образу и подобию Своему. О величии человека, о его глубинной Божественной Сущности говорит и Б. П. Вышеславцев, и это помогает нам лучше понять и осознать слова, сказанные Христом:

«Вы слышали, что сказано: «люби ближнего твоего и ненавидь врага твоего».

А Я говорю вам: любите врагов ваших, благословляйте проклинающих вас, благотворите ненавидящим вас и молитесь за обижающих вас и гонящих вас, да будете сынами Отца вашего Небесного; ибо Он повелевает солнцу Своему восходить над злыми и добрыми и посылает дождь на

праведных и неправедных». (Евангелие от Матфея, гл. 5, ст. 43- 45).

Приведённые слова Христа указывают, по-видимому, единственный путь к просветлению людей (ненавидящих и проклинающих), у которых Высшее Божественное Начало укутано плотными тёмными покрывалами, о которых ранее уже говорилось. Другие пути: убить, покарать являются тупиковыми, увеличивающими количество зла, накопленного человечеством за тысячелетия, и путь – убить является ещё более тупиковым, чем путь – покарать, уже потому, что мы не располагаем исчерпывающими знаниями о сущности человека, о том, что ожидает человека за смертным порогом. В рассказе «Сон Макара» В. Г. Короленко пишет о людях, перешагнувших порог смерти, которые идут на суд. Вместе с идущими на суд людьми идёт убийца, ему очень тяжело, он несёт свою жертву на своих плечах.

Пути насилия, наказания, устрашения ведут не к раскрытию, а к сокрытию Высшей Божественной сущности в человеке. Этими путями человечество идёт уже не одно тысячелетие.

Об отношениях между истиной и насилием Блез Паскаль писал: «Страшная это и продолжительная война, когда насилие пытается подавить истину. Все старания насилия не могут ослабить истины, а только служат к её возвышению». (См. Б. Н. Тарасов. «Паскаль». Изд. Молодая гвардия. М. 1979). Эти слова Блез Паскаль писал более трёх с половиной столетий назад. Они были актуальны в его время, не менее актуальны они и в наше время, поскольку ещё для многих людей авторитет насилия выше авторитета истины.

При решении многих вопросов исключительной важности, люди обращаются не к учению Христа, а к своим низменным инстинктам и, приняв решение, продиктованное этими инстинктами, заходят в глубокие тупики. Тупиковость путей убить, покарать ясно показывает Л. Н. Толстой в рассказе «Крестник». В этом рассказе крестник сажает на год в острог Ваську – вора. Проходит год и Крёстный говорит крестнику: «Смотри теперь, что ты своему отцу сделал. Василий теперь год в остроге просидел, всем злодействам выучился и остервенел совсем. Смотри, вот он у отца твоего двух лошадей угнал и, видишь, ему уж и двор запаливает. Вот что ты своему отцу сделал». Если человек за зло воздаёт большим злом, то тем самым он показывает, что он не намного лучше тех людей, которые причинили ему зло. Когда человеку причиняют зло, то обычно возмущается всё его существо и у человека возникает страстное желание отомстить обидчику. О мести апостол Павел говорит следующее: «Не мстите за себя, возлюбленные, но дайте место гневу *Божию*. Ибо написано: «Мне отмщение, Я воздам», - говорит Господь». (Послание к римлянам святого апостола Павла, гл. 12, ст. 19). «Мне отмщение, и Аз воздам» (церковно-славянский текст). Перевод на русский язык: «На Мне лежит отмщение, и оно придёт от Меня». Истинность этих слов подтверждает наша жизнь и примеров тому очень много. Достаточно вспомнить о судьбе большинства членов Ленинской гвардии, закончивших свой жизненный путь на Лубянке. По заслугам воздаёт людям Тот, Кто и мысли и дела всё знает наперёд. Последние семь слов, за исключением слова всё, принадлежат Михаилу Юрьевичу Лермонтову. Он писал:

Но есть, есть, Божий Суд, наперсники разврата!
Есть грозный Судия, Он ждёт;
Он не доступен звону злата,
И мысли и дела Он знает наперёд.

Пока у людей не будет ясного понимания пагубности пути, по которому человечество идёт тысячелетия, когда человек на насилие отвечает большим насилием, на зло – большим злом, человечество будет погружаться во всё более страшные войны, во всё более страшные кошмары. Христос опередил своё время на тысячелетия и Его Учение указывает людям, по-видимому, единственный возможный путь в Царствие Божие на Земле. Христос заповедовал возлюбить ближнего как самого себя. Идя на распятие, Христос обратился к своим ученикам со словами:

«Заповедь новую даю вам, да любите друг друга; как Я возлюбил вас, *так* и вы да любите друг друга.

По тому узнают все, что Вы мои ученики, если будете иметь любовь между собою». (Евангелие от Иоанна, гл. 13, ст. 34 – 35).

Далее приведу, заслуживающие внимания слова Наполеона, сказанные им о Христе. В конце своей жизни Наполеон Бонапарт был сослан на остров Святой Елены, много времени уделял чтению Евангелия и, подводя итоги прожитой жизни, писал: «Я знаю людей и могу сказать, что Иисус Христос был не просто человеком. Его нельзя сравнить ни с одним жившим на земле человеком. Александр Македонский, Юлий Цезарь, Карл Великий и я основали империи. Однако, что лежало в основе наших гениальных творений? Сила. Иисус Христос основал Свою империю на любви, и сегодня миллионы людей готовы отдать жизнь за Него».

Когда один французский философ, возомнивший себя создателем новой религии, пожаловался Талейрану (Талейрана Наполеон считал самым способным из всех своих министров), что он никак не оценен и что у него нет последователей, Талейран ему ответил: «Да, ввести новую религию не безделица; однако, я мог бы указать вам путь к достижению вашей цели». «А какой же?» - спросил философ. «Очень простой, - ответил Талейран. - Идите в мир, исцеляйте больных и воскрешайте мёртвых, потом отдайте себя на распятие, и предадут вас земле, а на третий день воскресните из мертвых. Если вы это сделаете, то непременно достигнете цели». (См. Непознанный мир веры, 13-е издание. Издательство Сретенского монастыря. Москва, 2012).

Сегодня мы можем в течение нескольких часов перемещаться из одной страны в другую, разговаривать, не выходя из дома, с людьми в других странах и на других континентах и видеть при этом собеседника, а также многое другое. Всё это ещё сто лет назад казалось невозможным, фантастикой, у которой мало шансов в обозримом будущем стать действительностью. Человечество на протяжении тысячелетий из века в век приближается к истине, но достижениям технического прогресса, которыми мы располагаем сегодня, очень далеко до того, что мог делать Христос. Приведу маленький фрагмент из Евангелия:

«Тут иудеи обступили Его и говорили Ему: долго ли Тебе держать нас в недоумении? Если Ты Христос, скажи нам прямо.

Иисус отвечал им: «Я сказал вам и не верите; дела, которые творю Я во имя Отца Моего, они свидетельствуют о Мне;» (Евангелие от Иоанна, гл. 10, ст. 24-25).

Христос говорил мёртвому – встань и тот вставал, слепому – прозри и тот становился зрячим. После того, как Христос исцелял неизлечимого больного, Он ему говорил: **«Иди и больше не греши».** Дела , которые творил Христос , были чудесными для того далёкого времени, когда Христос посетил

Землю, такими же они остаются и сегодня. Книжники и фарисеи, конечно же, не могли воскрешать мёртвых и возвращать зрение слепым, всё, чем они обладали, было мнимое благочестие. Они не могли простить Христу слова, обращённые к ним: **«Горе вам, книжники и фарисеи, лицемеры, что поедаете дома вдов и лицемерно долго молитесь: за то примете тем большее осуждение». (Евангелие от Матфея, гл.** 23, ст. 14). Когда Христос предстал перед Пилатом, то Пилат понял, что предали Христа из зависти.

Великий Учитель человечества и возлюбленный Сын Божий Иисус Христос так определяет цель человеческой жизни: **«Будьте совершенны, как совершен Отец ваш Небесный». (Евангелие от Матфея, гл. 5, ст. 48).**

Отец наш Небесный послал Иисуса Христа на Землю для спасения человечества. Современное летоисчисление (новая эра) ведётся от Рождества Христова. Пришествие Христа на Землю и Его Воскресение христиане считают самыми важными и самыми значимыми событиями в истории человечества. Слова Блеза Паскаля о Христе уже приводились в предисловии, но эти слова настолько важны и значимы для нашей действительности, что приведу их ещё раз: «Иисус Христос есть центр вселенной и цель, к которой мы все стремимся. Без учения Христа люди съели бы друг друга, мир сделался бы адом и развратился бы». Приведённые слова Блеза Паскаля помогают лучше понять, почему Христа называют Спасителем и очень убедительно показывают значимость учения Христа для каждого смертного.

Истинность слов, сказанных Блезом Паскалем, подтвердила Российская действительность, когда после октября 1917 года Россия стала страной воинствующего атеизма. То, о чём писал в сослагательном наклонении французский учёный Блез Паскаль, родившийся в 1623 году и проживший всего 39 лет, воплотилось в Российскую действительность во время правления нашей страной Лениным и Сталиным. Оценивая деятельность Ленина и Сталина, наш известный российский историк, доктор исторических наук Владимир Михайлович Лавров, написал: «Ленин и продолжатель его дела Сталин несут главную персональную ответственность за развязывание репрессий против миллионов ни в чём не виновных людей, за политику социального геноцида (предпринимателей, крепких крестьян, казачества и др.), за политику геноцида (против многих народов Кавказа), за создание ГУЛАГа, концлагерей, применение пыток (запрещённых в России со времён Александра Первого) и т.п. Ленин и Сталин совершили преступления против человечности, которые не имеют срока давности» (См. В. М. Лавров. В. И. Ленин. Имя Россия. Исторический выбор 2008. М. Астрель, 2008). То, о чём написал Владимир Михайлович Лавров – неопровержимые истины. Разве не знал Ленин о расстреле всей царской семьи, включая детей, в подвале дома купца Ипатьева? Разве не знали Ленин и его окружение о том, что сестра императрицы Елизавета Фёдоровна, её келейница Варвара и другие родственники царя были сброшены живыми в отработанную шахту в Алапаевске? Знал и Ленин, и его окружение. Именно по его приказу всё это делалось. Всё, о чём написал исполняющий обязанности директора Института российской истории РАН В. М. Лавров, прежде чем воплотиться в российскую действительность, было глубоко продумано. Ленин и продолжатель его дела Сталин, прежде всего, вынули из душ людей веру в Бога и образовавшуюся пустоту заполнили собой. Мне говорили, что довоенные (до 1941 года) положительные характеристики военнослужащих заканчивались словами: «Делу Ленина-Сталина предан». О том, какую опасность для вождя мирового пролетариата представляла бы живущая в человеческих душах глубокая непоколебимая вера в Бога и бескомпромиссная совесть, написал он в своём письме Горькому: «Миллион грехов, пакостей, насилий и зараз физических гораздо легче раскрываются толпой и потому, гораздо менее опасны, чем тонкая, духовная, приодетая в самые нарядные «идейные» костюмы идея боженьки». (См. полн. собр. соч., т. 48, стр. 226-227).

Опыт России, провозгласившей себя после октября 1917 года страной воинствующего атеизма, где счёт жертв репрессий и войн стал исчисляться десятками миллионов, показал и России и миру, что человечество не сможет обойтись без учения Христа, если оно хочет продолжать существовать.

Многие умнейшие люди считали и считают, что если человечество не обратится к нравственному учению Христа, то оно погибнет; этой точки зрения придерживался, например, создатель квантовой механики Макс Борн. Макс Борн, подытоживая пройденный жизненный путь, сожалел, что создавая квантовую механику, он не придавал надлежащего значения проблемам нравственного характера. Его работы были использованы для создания атомной бомбы.

Пока у людей не будет ясного понимания того, что Христос – Великий Учитель человечества и возлюбленный Сын Божий (Ф. М. Достоевский назвал Христа «великим и конечным идеалом развития всего человечества»), пока не будет ясного понимания того, что альтернативы Учению Христа нет, всё будет продолжаться так, как продолжается: будут войны, убийства, преступления, расследования, суды и из века в век будет повторяться то, о чём говорится в «Старинной солдатской песне», написанной Булатом Окуджавой:

Спите себе, братцы, всё придёт опять:
Новые родятся командиры,
Новые солдаты будут получать
Вечные казённые квартиры.

Булат Шалвович Окуджава (09.05.1924-12.06.1997) родился в Москве, скончался в Париже, перед самой смертью пожелал креститься с именем Иоанн. Булат Шалвович Окуджава – поэт, переводчик, прозаик, драматург, композитор и исполнитель собственных песен. «Старинная солдатская песня» им написана в 1973 году и многократно им исполнялась.

§3. О мнимой единице и её значимости, о неординарных людях, наделённых необычными способностями, о русской литературе и о пророчествах русских писателей

Известно, что квадратное уравнение

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

действительных корней не имеет. Любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

имеет два действительных корня, если его дискриминант $D \geq 0$ $(D = b^2 - \ 4ac)$. Нахождение корней квадратного уравнения (2) в случае, если $D < 0$ оказалось возможным только после введения в рассмотрение мнимой единицы i, квадрат которой равен минус единице, $i^2 = -1$. После введения в рассмотрение мнимой единицы были введены числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа. Числа вида $a + bi$ называются комплексными и изображаются точками плоскости. Действительные числа являются их частным случаем. Два комплексных числа $a + bi$ и $a - bi$ называются комплексно-сопряжёнными. Квадратное уравнение (2) с действительными коэффициентами в случае, если $D < 0$ имеет комплексно-сопряжённые корни. Уравнение (1) имеет комплексно-сопряжённые корни $x_1 = -i$ и $x_2 = i$.

Мнимая единица i лежит в основе всей теории функций комплексной переменной и математика без мнимой единицы не была бы той математикой, коей она является сегодня. Было бы безумством, если бы математики сегодня отказались бы от понятия мнимой единицы и изъяли бы это понятие из математики. Если же мы обратимся к реалиям нашей жизни, то увидим, что очень многие люди отрицают существование не какой-то мнимой единицы, а отрицают существование Бога – Творца миров и вселенных, подчинённых установленным Им законам, хотя созданное Творцом видят ежедневно. Именно то, что очень многие люди не верят в Бога и, следовательно, не сознают своей ответственности пред Богом и людьми за то, что они делают, определяет нашу жизнь и делает ей такой, какой она есть.

Если мир математической реальности разделить на две части и к первой части отнести ту её часть, которая не использует понятия мнимой единицы, а ко второй части отнести ту часть, которая использует это понятие, то единая математическая реальность будет состоять из двух миров. Связь между этими мирами установлена Леонардом Эйлером:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad (3)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{4}$$

Для $x \in R$ левые части соотношений (3) и (4) представляют собою действительные функции, а правые части этих соотношений выражаются через мнимо-показательные функции. (См. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Издательство «Наука». М. 1977, стр. 79).

Леонард Эйлер (15.04.1707-07.09.1783) – швейцарский, немецкий и российский математик, академик Петербургской академии наук и член многих академий наук мира, великий математический гений.

Леонарду Эйлеру удалось установить связь между двумя различными мирами математики, составляющими единую математическую реальность и хотелось бы надеяться, что придёт время, и люди установят связь между миром, в котором мы живём и миром, в который мы уйдём, перешагнув порог смерти. На пути, ведущему к раскрытию тайны смерти, не следует пренебрегать информацией, получаемой от людей, переживших состояние клинической смерти. Американский врач Раймонд Моуди прежде чем написать свою книгу «Жизнь после смерти», беседовал с сотнями людей, переживших клиническую смерть, выделяя то общее, что он слышал от многих своих собеседников, никак друг с другом не связанных.

Мы хорошо сознаём, что, живя в нашем физическом мире, мы с каждым прожитым днём приближаемся к смертному часу. Абсолютное большинство людей ничего не знает о том мире, в который мы перейдём. Надежда на то, что человечество постигнет великую тайну, о которой идет речь, связана с тем, что время от времени в наш мир приходят неординарные люди, которые больше знают о том, о чём идёт речь. О некоторых из них, бывших нашими современниками, и о тех, кто жил значительно раньше, хотелось бы хотя бы немного сказать.

Эммануил Сведенборг (29.01.1688-29.03.1772)

Эммануил Сведенборг – шведский учёный и христианский мистик, занимался космологией, математикой, механикой и анатомией. Эммануил Сведенборг, по-видимому, мог контактировать с теми, кто перешагнул порог смерти.

После внезапной кончины голландского посланника при стокгольмском дворе, графа Мартевиля, от его вдовы потребовали уплатить значительную сумму денег, якобы являющуюся долгом графа. В бумагах графа вдова не смогла найти платёжного документа и, зная, что у мужа нет долгов, обратилась к Сведенборгу. Сведенборга она попросила увидеться с мужем и спросить у него, где искать платёжный документ. Через некоторое время к вдове пришёл Сведенборг, сказал, что виделся с графом и попросил его помочь найти разыскиваемый документ. После визита Сведенборга вдова видит во сне своего умершего мужа, и он ей говорит, где искать документ, который она не может найти.

Эммануил Сведенборг знал о дне своего ухода из этого мира. Известно, что некоторые ранее жившие крестьяне, глубоко и искренне верившие в Бога, совесть которых была чиста пред Богом и людьми, знали о дне ухода из этого мира. О таком крестьянине пишет известный писатель Фёдор Абрамов в рассказе «Последний старик деревни». Абсолютное большинство смертных не знает об этом дне, и в этом великая милость Божия. Известный писатель Леонид Андреев в своём небольшом произведении «Рассказ о семи повешенных» показал, что происходит с человеком, души которого коснулась рука потустороннего страха, если он знает о дне своего ухода из этого мира.

Монах Авель (18.03.1757–29.11.1841)

Известно, что пророческий гений Израиля примерно за 500 лет до пришествия Христа на Землю, предсказал Его пришествие, Его крестную смерть и Воскресение. Христос говорил еврейским законоучителям открывать Библию и читать то, что о Нём написано. Авель заслуживает называться пророческим гением России.

«Монах Авель вошёл в историю России своими необычными и зловещими пророчествами о судьбе правителей государства, сбывшимися с поразительной точностью. Несмотря на простое крестьянское происхождение, он был удостоен личной аудиенции тремя императорами, последовательно правившими в России в эти годы. И каждый раз его сообщения служили поводом для последующего заточения его в тюрьму». (См. 100 пророчеств о судьбах России. Автор–составитель А. Ф. Конев. Современный литератор. Минск, 2003).

Авель предсказал судьбу всех Романовских монархов, включая Николая Второго, предсказал Советскую власть и то, до чего мы ещё не дожили. Всё было изложено письменно, прочитано императором Павлом Первым и запечатано им в конверт. (См. Роман Белоусов. Вещий Авель. Олимп. М. 1998).

Многие, не отрицая того, что Авель был принят тремя императорами, что за свои пророчества он провёл более 20 лет в тюрьмах, что в тюрьме он и умер, справедливо говорят, что особенно художественная литература об Авеле не опирается на документальные подтверждения. В художественной литературе могут допускаться авторские добавления, не вполне соответствующие действительности.

Однако, истинность лишь одного факта, что Авель предсказал день и час смерти императрицы Екатерины Второй, уже делает Авеля пророческим гением России. Авель в своей жизни следовал словам Христа: **«Кто хочет идти за Мною, отвергнись себя и возьми крест свой и следуй за Мною».** (Евангелие от Марка, гл. 8, ст. 34). Этим путём шли ученики Христа. Почти все они умерли мученической насильственной смертью. Евангелист Иоанн Богослов был, возможно, единственным из учеников Христа, умершим своею смертью. Жизнь Его закончилась на уединённом острове. В конце жизни у Него было продолжительное видение, в котором Бог показал Ему судьбу мира. Увиденное Иоанн Богослов записал шифрованным текстом, озаглавленным «Откровение Святого Иоанна Богослова».

Авель, идя путём, который он избрал, говорил императорам не то, что они ожидали от него услышать, а бесстрашно говорил то, что их ожидает и мужественно и безропотно переносил те испытания, которые его ожидали после того, как он уходил из царского дворца.

Основной документ «Судьбы державы Российской», запечатанный Павлом Первым в конверт, на котором он написал: «Вскрыть Потомку Нашему в столетний день моей кончины», пропал вместе с другими царскими документами в

1917 году и остались лишь косвенные подтверждения существования этого документа:

«Сохранились документальные свидетельства того, как 11 марта 1901 года, в столетнюю годовщину смерти Павла Первого, царствующий император Николай Второй и императрица Александра Фёдоровна с детьми в сопровождении приближенных лиц отправились в Гатчину. Государь с семьёй заперлись в комнате Гатчинского дворца, где многие годы хранился завещанный ларец. Когда царская семья появилась после этого перед свитой, присутствующие отметили, что на их лицах словно запечатлелась какая-то страшная тайна. Не раз после этого царь Николай Второй говорил о своей насильственной кончине». (См. 100 пророчеств о судьбах России…).

Подытоживая сказанное об Авеле, отметим, что Николай Первый был третьим императором, принявшим Авеля, и отметим, что абы кого императоры не принимали.

Эдгар Кейси (18.03.1877–03.01.1945)

Эдгар Кейси - американский мистик и пророк - родился в США. Кейси предсказал распад Советского Союза. Думаю, что в Советском Союзе мало кто знал об этом пророчестве и ещё меньше было таких, кто верил в предсказанный Кейси распад. Пророчество Кейси сбылось через 46 лет после его смерти. Заслуживает внимания пророчество Кейси о будущем России, до которого мы ещё не дожили. В этом пророчестве утверждается, что Россия возродится и покажет другим народам образец человеческих отношений, основанных на любви, доверии и мудрости. Но пока в сознании большинства наших людей выгода будет стоять выше правды и будет предпочтительнее правды, возрождения, которое предсказывал Кейси, не будет. В романе «Воскресение» Л. Н. Толстой приводит слова Христа: **«Ищите же прежде Царства Божия и правды Его, и это всё приложится вам»** (Евангелие от Матфея, гл. 6, ст. 33) и, продолжая далее, пишет, что мы же ищем всего остального и не находим его.

Эдгар Кейси умер в возрасте 67 лет. Его последними словами были: «Как же наш мир сейчас нуждается в Боге».

Ванга (31.01.1911–11.08.1996)

Ванга – всемирно известная болгарская ясновидящая, наша современница. К ней приезжали посетители со всего мира и о ней написано много книг. Здесь скажу лишь о двух предсказаниях Ванги и о посещении Ванги директором института мозга Наталией Петровной Бехтеревой.

После занятия Будапешта Красной армией бесследно исчез шведский дипломат Рауль Валенберг. Было выдвинуто две версии его исчезновения. Согласно первой версии, Валенберг решил разорвать все существующие связи и оставшуюся жизнь прожить в одной из стран Латинской Америки. Согласно второй версии, он был задержан СМЕРШем и отправлен в Москву. Когда обратились к Ванге, она сказала, что Валенберг, по личному распоряжению Берии, был задержан СМЕРШем и отправлен в Москву. Безошибочность слов, сказанных Вангой, подтвердило время.

Когда Ванга предсказала дату смерти Сталина, руководство Болгарии заключило её в тюрьму. После того, как её предсказание осуществилось, она была освобождена.

Встреча академика Наталии Петровны Бехтеревой с Вангой изменила её мировоззрение. После встречи с Вангой Наталия Петровна написала: «К Ванге я поначалу относилась в высшей степени критично. Мой материалистически воспитанный разум не поколебали ни книги, ни свидетельства очевидцев.

Почти все учёные молчали, а те, кто решался на комментарии, сходились во мнении о наличии у Ванги штата осведомителей, наводящих все «справки» о каждом её посетителе.

И чтобы выработать какое-то мнение, необходимо было убедиться самой, что это за человек. И теперь я знаю… живут и здравствуют подлинные ясновидящие, с большой надёжностью предсказывающие будущее, «видящие» не только прошлое, но и скрытое от глаз «настоящее»». (См. Наука и религия. 1992, №3).

Заслуживают внимания следующие два высказывания Натальи Петровны :

« Всю свою жизнь я посвятила изучению самого совершенного органа – человеческого мозга . И пришла к выводу , что возникновение такого чуда невозможно без Творца» .

«Мысль существует отдельно от мозга , а он только улавливает её из пространства и считывает».

Вольф Мессинг (10.09.1899–08.11.1974)

Вольф Мессинг – наш современник, известный в нашей стране и за её пределами экстрасенс. Здесь приведу предсказание Мессинга о победе Советского Союза в Великой Отечественной войне.

«Пророчество Вольфа Мессинга в зале клуба НКВД зимой 1940 года о победе советских войск над фашистской Германией прозвучало за несколько месяцев до нападения Германии на Советский Союз. Выступление Мессинга близилось к концу, он отвечал на записки, которые не подписывались. Среди прочих промелькнула записка: «Что вы думаете о советско-германском пакте?». Едва он прочёл вопрос, то у него, как говорят некоторые современные сенситивы, «пошла картинка». Тогда и прозвучала известная фраза: «Я вижу танки с красными звёздами на улицах Берлина!».

В то время действовал пакт Молотова–Риббентропа, пакт о дружбе и ненападении между двумя странами. Вся советская пресса и все средства массовой информации пребывали в эйфории по поводу заключённого пакта и всячески славили советско-германскую дружбу и мудрого Сталина, который избавил свой народ от войны.

Рассказывают, в зале стало тихо, очень тихо… Это пророчество испугало публику. Чтобы понять, как прозвучали и что значили эти слова, нужно было жить в то время. Нужно представить себе и тех, кто сидел в зале. Это были следователи, мастера массовых казней и расстрелов, которые тех, кто говорил или хотя бы слушал такое, тут же отправляли в концлагерь или на расстрел. Некоторые, сидевшие ближе к дверям, на цыпочках по одному стали красться к выходу: «Меня там не было!». (См. 100 пророчеств о судьбах России. Автор – составитель А. Ф. Конев. Современный литератор. Минск.2003).

В Библии сказано, что Бог создал человека по образу и подобию Своему. Богом в человеке заложены великие возможности, но доступ к этим возможностям пока открывается, может быть, лишь одному из миллионов. Из сказанного о Ванге, Кейси и Мессинге следует, что доступ к этим великим возможностям открывался нашим современникам.

Коснувшись неординарных людей, наделённых необычными способностями, перейду к русским писателям и скажу очень немного о А. И. Солженицыне, М. Ю. Лермонтове, И. А. Бунине, Ф. М. Достоевском и о вкладе этих писателей в русскую литературу, способствующему пробуждать в людях гуманизм, сострадание, человечность и высшие начала, заложенные Богом в человеке, возможности которых превосходят возможности интеллекта.

А. И. Солженицын (11.12.1918-03.08.2008)

Моё знакомство с творчеством Александра Исаевича Солженицына началось с прочтения его повести «Один день Ивана Денисовича». Это произведение с ведома Н. С. Хрущёва в 1962 году было напечатано в журнале «Новый мир» (№11, 1962) и сразу же было переведено на многие иностранные языки. Другие произведения А. И. Солженицына я покупал уже после распада Советского Союза, когда они лежали на книжных прилавках. Прочитав «Раковый корпус» и другие произведения А. И. Солженицына, я увидел, что в своих произведениях Александр Исаевич показывает, что преступника, совершившего преступление, не минует наказание Господне.

Александр Исаевич – наш современник, и я слушал его выступления. Особенно запомнилось мне то, что он сказал о публикации «Архипелага Гулаг». Он сказал, что опубликовав «Архипелаг Гулаг» на Западе, он положил голову на плаху, а далее сказал : « Поверьте, как легко умирать, когда сознаёшь, что исполнил свой долг пред Богом и людьми».

Большое впечатление на меня произвела статья Александра Исаевича «Жить не по лжи», написанная в 1974 году для Самиздата. Она была актуальна тогда, когда была написана, актуальна она и сегодня. В этой статье автор показывает, что насилие само по себе существовать не может, оно всегда берёт себе в союзники ложь. Обращаясь в этой статье к советским людям, Александр Исаевич перечисляет различные бытующие формы лжи и пишет, что если хотите, чтобы были изменения к лучшему, перестаньте лгать. Далее он пишет о том, что будет, если людей, которые не лгут и способны отказаться от того благополучия, которое они имеют сегодня, будут десятки тысяч: «Станут нас десятки тысяч, и мы не узнаем нашей страны! Если же мы струсим, то довольно жаловаться, что кто-то нам не даёт дышать – это мы сами себе не даём!».

Итоги прожитой жизни А. И. Солженицын подводит в своём маленьком произведении

Молитва

Как легко мне жить с Тобой, Господи!
Как легко мне верить в Тебя!
Когда расступается в недоумении
Или сникает ум мой,
Когда умнейшие люди
не видят дальше сегодняшнего вечера
и не знают, что надо делать завтра,
Ты снисылаешь мне ясную уверенность,
что Ты есть и что Ты позаботишься,
чтобы не все пути добра были закрыты.
На хребте славы земной
я с удивлением оглядываюсь на тот путь
через безнадёжность – сюда,
откуда и я смог послать человечеству
отблеск лучей Твоих.
И сколько надо будет,
чтобы я их ещё отразил,-
Ты дашь мне.
А сколько не успею –
значит, Ты определил это другим.

М. Ю. Лермонтов (03.10.1814–15.08.1841)

Михаил Юрьевич Лермонтов – великая неординарная личность, в нём сочетался большой поэтический дар с пророческим даром, позволявшим ему видеть события далёкого будущего. Здесь ограничусь тем, что приведу пророчество М. Ю. Лермонтова о России.

Настанет год, России чёрный год,
Когда царей корона упадёт
Забудет чернь к ним прежнюю любовь,
И пища многих будет смерть и кровь.
Когда детей, когда невинных жён

Низвергнутый не защитит закон;
Когда чума от смрадных мёртвых тел
Начнёт бродить среди печальных сёл.

Возможно, что картины далёкого будущего, о котором пророчествовал Михаил Юрьевич, картины Октябрьского переворота, картины голода тридцатых годов, он видел также ясно, как ясно видел Вольф Мессинг танки с красными звёздами, идущие по улицам Берлина. Было бы не удивительно, если бы сказанное Михаилом Юрьевичем в его пророчестве исходило из уст очевидца этих событий, перед глазами которого они происходили. Но Михаил Юрьевич пророчествовал о далёком будущем и нужно было слишком отчётливо видеть это далёкое будущее, чтобы в своём пророчестве так точно выразить события, действительно происшедшие в России: и падение царской короны, и низвергнутый закон и голод начала тридцатых годов. О низвергнутом законе Н. Я. Мандельштам написала: «Думали ли мы, отменяя в России всякую законность в 1917 году, что мы её отменяем и для себя?». (См. В. А. Солоухин. Наваждение. Библиотека «Огонёк», № 43, М. 1991).

И. А. Бунин (10.10.1870–08.11.1953)

Здесь не буду касаться творчества И. А. Бунина, а скажу о двух его пророчествах. Иван Алексеевич Бунин – первый русский писатель – лауреат нобелевской премии по литературе. Иван Алексеевич больше чем писатель. Как и М. Ю. Лермонтов, – личность великая и неординарная. Иван Алексеевич в 1903 году в своём маленьком рассказе «Сны» предсказал все три русские революции. Действие происходит в поезде и один из пассажиров рассказывает о деревенском священнике, к которому ночью пришла его умершая дочь: «Лежу, говорит, гляжу на лампадку и вдруг вижу: открывается тихенько–тихенько этак дверь и входит ко мне дочь–покойница. «Что такое думаю, что за притча такая, Господи!» А она подходит прямо ко мне и кладёт мне руку на руку. Сама вся в чёрном, а лицом белая, белая да красивая! И этак вполголоса «Встань, говорит, батюшка, иди поскорее в церковь». Я р-раз с постели, а ей уж нету! Посидел я, посидел, и, что больше сижу, всё чудней и страшней мне становится. Вскочил наконец того, на ноги, захватил ключи от церкви, накинул шубёнку, выбрался в сенцы…Темь, жуть, сенцы так и гудут от бури, - думаю, надо итить! Спешу на гору, дохожу до церкви, - глядь, а там огонёк теплится, ровно бы покойник на ночь поставлен. Оробел я опять, одначе перекрестился – и на паперть. Насилу ключом в замок попал. Отворяю дверь – нет тебе никакого покойника, а только горит свечка над царскими вратами. Кто же это, думаю, её зажёг, что такое буде! Стою ни жив ни мёртв, вдруг р-раз! - отдёрнулась занавесь на царских вратах, растворяются этак широко и тихо двери и выходит из темени, из самого, значит, алтаря, агромадный красный кочет. Вышел, остановился, затрепыхал крыльями и как закричит на всю церкву: ку-ка-ре-ку! Пропел до трёх раз и пропал. И только, значит, пропал, выходит из алтаря другой, белый, как кипень, и запел ещё громче прежнего. И опять до трёх раз. У меня, рассказывал священник поутру, руки, ноги отнялись, а я всё стою и жду, что будет дальше, а дальше выходит третий: чёрный, как головёшка, только гребешок светится, и запел он, братцы мои, таково жутко и строго, что опустился я на колени и говорю этак внятно и раздельно на всю церкву: «Да воскреснет Бог и расточатся враги Его!» И только это сказал я, – нет тебе никаких кочетов, а стоит передо мною седенький – седенький монашек и говорит мне тихим голосом: «Не пужайся, служитель Божий, а объяви всему народу, что, мол, означает твоя видение. А означает она ба–альшие дела!». (См. И. А. Бунин. Избранное. Ставропольское книжное издательство. 1976)

В своей парижской речи, произнесённой 16 февраля 1924 года, И. А. Бунин говорит о переименовании Града Святого Апостола Петра в Ленинград и говорит о том, что его охватывает библейский страх не только за Россию, но и за Европу. Далее он за семнадцать лет до начала Великой Отечественной войны предсказывает судьбу нашей северной столицы: «В своё время непременно падёт на всё это Божий гнев, – так всегда бывало. «Се Аз восстану на тя Тир и Сидон и низведу тя в пучину моря…». И на Содом и Гомору, на все эти Ленинграды падёт огонь и сера…». (См. Неизвестный Бунин. Окаянные дни. Изд. « Молодая гвардия». М. 1991)

Ф. М. Достоевский (11.11.1821–28.12.1881)

Фёдор Михайлович Достоевский и сегодня является наиболее читаемым в мире писателем. Из написанных им произведений здесь коснусь только его пророческого романа «Бесы» и приведу слова этого великого писателя о том, как он от атеизма пришёл к непоколебимой вере в Бога.

Роман «Бесы» был романом–предупреждением России. Он был опубликован в 1872 году за 45 лет до событий в России в 1917 году. Ф. М. Достоевский в романе «Бесы» показал, что будет с Россией, если она пойдёт путём революционного насилия.

Ф. М. Достоевский был революционером, контактировал с В. Г. Белинским, и о себе и о Белинском пишет: «Белинский никогда не рисовался. Мы пошли вместе. Он, помню, сказал мне дорогою: «А вот как зароют в могилу (он знал, что у него чахотка), тогда только спохватятся и узнают, кого потеряли».

В последний год жизни, я уже не ходил к нему. Он меня невзлюбил, но я страстно принял всё учение его. Ещё год спустя в Тобольске, когда мы в ожидании дальнейшей участи сидели в остроге на пересыльном дворе, жёны декабристов умолили смотрителя острога и устроили в квартире его тайное свидание с нами. Мы увидели этих великих страдалиц, добровольно последовавших за своими мужьями в Сибирь. Они бросили всё: знатность, богатство, связи и родных, всем пожертвовали для высочайшего нравственного долга, самого свободного долга, какой только может быть. Ни в чём неповинные, они в долгие двадцать пять лет перенесли всё, что перенесли их осуждённые мужья. Свидание продлилось час. Они благословили нас в новый путь, перекрестили и каждого оделили Евангелием – единственная книга, позволенная в остроге. Четыре года пролежала она под моей подушкой в каторге. Я читал её иногда и читал другим. По ней выучил читать одного каторжного. Кругом меня были именно те люди, которые по вере Белинского, не могли не сделать своих преступлений, а стало быть, были правы и только несчастнее, чем другие».

Подаренная жёнами декабристов книга, которую Фёдор Михайлович вдумчиво прочитал, изменила его мировоззрение. С глубокими и истинными высказываниями Ф. М. Достоевского мы знакомимся, читая его художественные произведения и его дневник. Приведу двенадцать заслуживающих внимания высказываний Ф. М. Достоевского, взятых из различных его произведений:

1. Самые серьёзные проблемы современного человека происходят от того, что он утратил чувство осмысленного сотрудничества с Богом в Его намерении относительно человечества.

2. Бог посылает мне иногда минуты, в которые я совершенно спокоен, в эти минуты я люблю и нахожу, что другими любим, и в такие–то минуты я сложил в себе символ веры, в котором всё для меня ясно и свято. Этот символ очень прост, вот он: верить, что нет ничего прекраснее, глубже, симпатичнее, разумнее, мужественнее и совершеннее Христа, и не только нет, но с ревнивою любовью говорю себе, что и не может быть.

3. Вся жизнь человека, личная и общественная, стоит на вере в бессмертие души. Это наивысшая идея, без которой ни человек, ни народ не могут существовать.

4. Идея о бессмертии – это сама жизнь, живая жизнь, её окончательная формула и главный источник истины и правильного сознания для человечества.

5. Христианство есть единственное убежище Русской земли от всех её зол.

6. Тот, кто хочет увидеть живого Бога, пусть ищет Его не на пустом небосводе собственного разума, но в человеческой любви.

7. Лгут одни негодяи.

8. Без Бога всё позволено.

9. Созидается общество началами нравственности.

10. В идеале общественная совесть должна сказать: пусть погибнем мы все, если спасение наше зависит лишь от замученного ребёнка, – и не принять этого спасения.

11. Оправдайте, не карайте, но назовите зло злом.

12. Здесь Бог с дьяволом борются, а поле битвы – сердца людей.

§4. Омоих замечательных коллегах вместе с которыми я работал .

Посвящается светлой памяти Мартуни Александровича Арутюняна и Исая Ивановича Микаеляна.

С Мартуни Александровичем я работал в начале семидесятых годов в Ставропольском политехническом институте, а с Исаем Ивановичем – в Пятигорском технологическом университете уже в новом двадцать первом веке, пока в 2012 году он не уехал в Ереван. Сейчас и Мартуни Александрович, и Исай Иванович в том мире, в который предстоит уйти нам всем и о котором мы так мало знаем. Они были мне близки по духу и для меня незабываемы. Царствие им Небесное и вечная светлая память.

Мартуни Александрович был замечательным неординарным человеком. Я был знаком со всеми членами его семьи. Мартуни Александрович часто приглашал меня к себе в гости. Для меня незабываемо радушие, с которым меня принимали в его семье. В одной из бесед Мартуни Александрович рассказал мне легенду о том, как в один индийский монастырь пришёл учёный гость. Мне запомнилась эта легенда, и её содержание даётся в пятой главе. Особую ценность представляет точка зрения Мартуни Александровича на путь научного знания.

На путь научного знания Мартуни Александрович смотрел как на один из возможных путей к Богу и называл этот путь милостью Божией для безбожников. Он считал, что открывая законы, установленные Богом, учёный-атеист приходит к пониманию того, что сами по себе эти законы возникнуть не могли; учёному открывается величие Творца, и он начинает благоговеть перед Его величием.

На кафедре математики Пятигорского технологического университета мы вместе с Исаем Ивановичем Микаеляном работали несколько лет. Его последнее учебное пособие, содержащее олимпиадные задачи, я редактировал (см. [54]). В наших беседах мы обсуждали математические проблемы, касались русской литературы, произведений её великих представителей, прежде всего произведений Фёдора Михайловича Достоевского, а также произведений писателей, открытых гласностью: А.И. Солженицына, неизвестного И. А. Бунина и других писателей. Мы затрагивали также и вопросы мировоззренческого характера. До знакомства с Исаем Ивановичем я не знал, что первой страной, принявшей христианство, была Армения, не знал, что христианство Армения приняла в 301 году. Не знал я и о том, что после Воскресения Христа двое из двенадцати апостолов Фадей и Варфоломей пришли в Армению и уже в первом веке нашей эры в Армении были христианские общины. Исай Иванович один из тех замечательных людей, встретившихся на моём жизненном пути, которые не забываются.

Вся жизнь Исая Ивановича была связана с работой в Высшей школе. Он работал в Армении в Ереванском университете, в России в Пятигорском технологическом университете и в Алжире, обладал редкой эрудицией и имел большой опыт научной и педагогической работы. Я был очевидцем того, как много сил Исай Иванович отдавал университету, как много времени он проводил в стенах университета, занимаясь работой, которая не оплачивалась: консультировал студентов и занимался с молодыми преподавателями, помогая им в их научной работе. Исай Иванович был руководителем еженедельного научного семинара, на котором слушались доклады преподавателей кафедры.

Исай Иванович был самым эрудированным человеком на кафедре, владел тремя языками: армянским, русским и французским и пользовался заслуженным уважением и студентов и преподавателей кафедры.

Я очень благодарен Исаю Ивановичу за то, что он согласился в своё олимпиадное пособие (См. [54]) поместить мой биографический очерк. Перед отъездом Исая Ивановича в Ереван, я сказал ему, что я благодарен Всевышнему за то, что встретил его на моём жизненном пути.

Глава 5

О моей жизни

Изменения к лучшему в нашей жизни будут
происходить по мере того как любовь к силе
будет вытесняться силой любви.
(Индийская мудрость).

1

Эта глава посвящается светлой памяти моих родителей, близких и дальних родственников, ушедших из этого мира, и всем замечательным людям, встретившимся на моём жизненном пути и оставившим этот мир .

У многих людей на закате жизни возникает желание написать о прожитой жизни. На страницах этого биографического очерка мне хотелось бы рассказать о своей жизни, начиная с детского сада, рассказать о том, как формировалось моё мировоззрение и рассказать о людях, встретившихся на моём жизненном пути, многих из которых считаю своими учителями. Рассказывая о своей жизни и о людях, встретившихся на моем жизненном пути, буду также касаться книг, оказавших влияние на формирование моего мировоззрения и книг, на которых останавливалось моё внимание. Среди прочитанных книг наиболее сильное влияние на формирование моего мировоззрения оказали прочитанные в студенческие годы четыре Евангелия от Матфея, Марка, Луки и Иоанна, в которых излагается учение Христа.

О том, что не просто так человек попадает в этот мир, о том, что Господь Бог, посылая человека на Землю, определяет и цель пребывания человека на ней, М. Ю. Лермонтов в романе «Герой нашего времени» словами Печорина говорит: «Перебираю в памяти всё моё прошедшее и спрашиваю себя невольно: зачем я жил? Для какой цели я родился?... А, верно, она существовала, и, верно, было мне назначение высокое, потому что я чувствую в душе моей силы необъятные… Но я не угадал этого назначения, я увлёкся приманками страстей пустых и неблагодарных». Читая слова Михаила Юрьевича о приманках страстей пустых и неблагодарных, приходится поражаться тому, что уже в свои молодые годы он видел глубинную суть этих соблазнов. Говоря же о предназначении высоком и таящихся в душе силах необъятных, Михаил Юрьевич, по-видимому, в неявной форме говорит о себе. Думаю, что многие к своим 72 хотели бы подняться на тот уровень развития, на который Михаилу Юрьевичу удалось подняться к 27 годам.

Смотря на пройденный жизненный путь, хотел бы, прежде чем начать рассказывать о своей жизни, коснуться двух факторов, оказывающих влияние на направление нашего жизненного пути: любви к силе и соблазнов. О соблазнах говорит Христос в «Новом Завете», о соблазнах говорится в только что процитированных строках Михаила Юрьевича Лермонтова. Читающий эти строки может подумать, что сегодня XXI век и рассуждения о соблазнах просто неуместны. Обратимся к Андрею Николаевичу Колмогорову и посмотрим на его отношение к соблазнам. Сергей Лесков пишет: «В 40 лет Андрей Колмогоров, который к тому времени уже был академиком, членом Президиума Академии наук, академиком – секретарём физико-математического отделения, директором института математики и механики МГУ, начал вести дневник. Среди первых записей имеется личная программа: «1. Дисциплина в выполнении скучных работ. 2. Уверенная и последовательная расчистка возможностей для спокойной работы над большими замыслами. 3. Борьба с соблазнами…»». (См. С. Лесков. Умные парни. М. 2011). Соблазняясь, обычно отказываются от высшего в обмен на низшее. Если человек не верит в Бога, не считает своим долгом служить ближним, то многое его соблазняет. Жизнь человека в этом случае являет собою большое разнообразие, большую коллекцию самых различных соблазнов. Есть прямая связь между уровнем развития человека и тем, что может его соблазнить.

Американские индейцы соблазнялись стеклянными бусами, за бусы у них можно было выкупить пленника и спасти его от смерти. Часто человек, стоящий перед выбором, делать то, что он должен делать или то, что ему приятно делать (смотреть футбол, проводить время в ресторане в компании друзей и прочее), соблазняясь, выбирает то, что ему приятно делать. Такие люди обычно мало чего достигают в жизни. Когда души людей будут освещаться светом непоколебимой веры в Бога, светом высоких истин, а души тех, кто называет себя христианами, светом Евангельских истин, люди будут видеть глубинный смысл соблазнов и не позволят себе увлечься ими. Граф Алексей Константинович Толстой, автор романа «Князь Серебряный», в котором представлена Россия времён Ивана Грозного, писал: «Я верю в Бога всецело и безгранично…Нам, быть может, ещё много лет жить на этой Земле – будем же стараться быть лучше и достойнее…». Жизнь в нашей стране тогда изменится к лучшему, когда люди будут жить по совести, а не руководствоваться выгодой, в основе которой лежит явная или хорошо замаскированная неправда, и выгода не будет в состоянии поколебать их нравственные устои. Изменения к лучшему начнутся тогда, когда обстоятельства, с которыми люди сталкиваются в жизни, не смогут быть причинами отхода людей от нравственных устоев. Говоря о соблазнах, Михаил Юрьевич употребляет более простое для понимания слово, - приманки. Значение слова приманка не представляет труда для понимания. Например, приманка для рыбы, её глубинный смысл хорошо понятен рыбаку, рыба же этого глубинного смысла не понимает и мы знаем, чем она за это непонимание расплачивается.

Слово соблазн более ёмкое и, по-видимому, не такое простое для понимания, как конкретное русское слово обман, соблазняют обычно очень хорошо замаскированным обманом, который иногда не понимается в течение десятилетий.

Любовь к силе в нашей жизни играет большую роль, являясь для многих из нас как бы путеводной звездою. Жажда власти, стремление к обогащению, любовь к деньгам – всё это формы любви к силе. Человек, считая власть и богатство ценностями высшего порядка, обладая ими, стремится утвердиться, возвыситься над окружающими, а на очень высоких ступенях власти и богатства даже обожествить себя. В «Сказке о рыбаке и рыбке» А. С. Пушкин показывает, что если человек стремится к власти и богатству, то при достижении желаемого уровня власти и богатства, удовлетворения не происходит, а жажда подняться на новый более высокий уровень возрастает.

Большой притягательностью обладает сила. Уже физическая сила обладает большой притягательностью. Мне рассказывали, что в одной русской деревне, где дома и бани были построены из брёвен, жил парень, обладавший необычной физической силой. Мальчишки его сопровождали так же, как сопровождают важных персон. Это молодому деревенскому богатырю, наконец, надоело, он собрал у мальчишек шапки, приподнял баню и положил шапки между брёвен. Притягательность силы возбуждает в человеке большую любовь к ней. Труднее даётся человеку любовь к Богу и людям. Вот что говорит Христос о любви к Богу и людям в «Новом Завете»:

«И один из них, законник, искушая Его, спросил, говоря: Учитель! Какая наибольшая заповедь в законе? Иисус сказал ему: «возлюби Господа Бога твоего всем сердцем твоим, и всею душою твоею и всем разумением твоим»: сия есть первая и наибольшая заповедь; вторая же подобная ей: «возлюби ближнего твоего, как самого себя»; на сих двух заповедях утверждается весь закон и пророки» (Евангелие от Матфея, гл. 22, ст. 35 – 40).

Мы лучше поймём эту заповедь, если верим в то, что миры и вселенные созданы всемогущим Богом и задумаемся над тем, что живём в мире, в котором Творцом предусмотрено всё, что нужно человеку. Любовь к Богу начинается с приверженности человека правде и справедливости. **«Бог не в силе, а в правде»**, - гласит великая русская пословица. Если же человек считает, что миры и вселенные возникли сами по себе, то ему трудно понять и принять то, о чём говорит Христос. Мартуни Александрович Арутюнян рассказал мне древнюю легенду, которая, возможно, поможет понять и принять слова Христа о любви к Богу и ближним: «В один индийский монастырь, где жившие в нём мудрецы занимались духовными поисками и достижением физического совершенства, пришёл учёный гость. Учёный гость, представляясь, сказал о себе, что он самый образованный человек на нашей планете, что он желал бы беседовать с мудрецами, изложить им свои взгляды и послушать их. Учёный гость был атеистом. Беседуя с мудрецами, он отрицал бытиё Божие, просил мудрецов опровергнуть его концепции, чего мудрецы не в состоянии были сделать. Они сказали учёному гостю, что по своей малой образованности они не могут продолжать с ним дискуссии и попросили его подождать главного мудреца.

Монастырь, в котором жили мудрецы, находился на окраине города и стоял на берегу реки в том месте, где через реку был построен мост. Главный мудрец был отшельником и жил за городом. Мудрецы послали к нему недавно пришедшего к ним молодого человека. Этот молодой человек сказал главному мудрецу, что в монастырь пришёл учёный атеист, спорит с мудрецами, задаёт им вопросы, на которые они не находят ответы, и мудрецы просят его прийти в монастырь и продолжить дискуссии с учёным гостем. Главный мудрец попросил сказать учёному гостю, что он придет завтра к обеду. Вечером посланный возвратился в монастырь и учёному гостю доложили, что главный мудрец придёт завтра к обеду, и он стал ждать.

Пришло время обеда, но главного мудреца не было, не пришёл он и вечером, а появился только тогда, когда небо было усыпано звёздами. Учёный гость посчитал ниже своего достоинства с ним разговаривать и сказал мудрецам: «Как можно иметь дело с человеком, отрастившим до пояса седую бороду, но до сих пор не научившегося выполнять своих обещаний?» Главный мудрец, обратившись к учёному гостю, сказал, что пришёл бы вовремя, но непредвиденное обстоятельство задержало его. Он сказал, что как только вступил на мост, увидел, что на том берегу, на котором стоял монастырь, начало расти дерево. Когда он делал первые шаги по мосту, это был всего лишь небольшой куст, когда же он дошёл до середины моста, выросло само собой громадное дерево на несколько обхватов. Он сказал, что не мог не остановиться перед этим чудом, стоял на мосту и смотрел, что будет дальше. Дальше сами собой появились топоры и срубили это дерево, а потом появились пилы и распилили его на доски. Затем появился столярный инструмент и из досок была сделана ладья. Как только на ладье появился парус, как из-под земли появились матросы, столкнули ладью в реку и уплыли вниз по течению.

Учёный гость, будучи человеком воспитанным, не перебил рассказчика ни единым словом. Когда же главный мудрец закончил свой рассказ, учёный гость решил больше не обращаться к безумцу, рассказ которого он только что терпеливо выслушал. Он обратился к мудрецам и спросил их:

«Этого-то дурака вы и считаете самым главным?» Тогда главный мудрец, обратившись к учёному гостю, сказал: «Не безумец ли ты, допускающий, что Земля и всё на ней существующее, возникли сами собой и так категорично отказывающийся допустить такую малость»».

В основе мировоззренческой модели учёного гостя лежал большой абсурд (лат. absurdus, русск. перевод – нелепость, бессмыслица), лежала убеждённость, что окружающий нас мир возник сам по себе, в рассказе главного мудреца он не смог рассмотреть свою мировоззренческую модель, представленную в миниатюре, и посчитал главного мудреца безумцем. Обычно малая нелепость быстро обозревается нашим рассудком, быстро оценивается и отвергается, большая же нелепость может лежать в течение всей жизни в основе мировоззрения человека. Эта большая нелепость (всё возникло само собой) лежит в основе миросозерцания каждого атеиста. Луи Пастер писал: «Ещё настанет день, когда будут смеяться над глупостью современной нам материалистической философии». Когда сбудутся слова Луи Пастера , тогда , по – видимому , сбудется и пророчество американского провидца Эдгара Кейси о том , что именно Россия , покажет остальным странам образец человеческих отношений , основанных на любви , доверии и мудрости.

Сказанное о большой нелепости можно повторить и для большой лжи. Большая ложь многие десятилетия может приниматься за правду. Например, и сегодня многие люди верят в то, что Ленин и Сталин отдали свою жизнь за свободу и счастье простых людей.

Если бы на наших дорогах не соблюдались бы правила уличного движения, то заранее предсказать количество жертв, являющихся следствием этого несоблюдения, было бы затруднительно. Количество же жертв, являющихся следствием неисполнения заповедей Христа, известно. За последние сто лет в результате неисполнения заповедей Христа в одной только России много миллионов погибло на полях сражений и в застенках ГУЛАГа (красный террор, гражданская война, репрессии тридцатых годов, две мировые войны).

О пребывании человека в этом мире и его ответственности пред Богом за свои поступки, говорит Христос в «Новом Завете» в притче о винограднике и виноградарях.

Притча о винограднике и виноградарях.

«Был некоторый хозяин дома, который насадил виноградник, обнёс его оградою, выкопал в нём точило, построил башню и, отдав его виноградарям, отлучился.

Когда же приблизилось время плодов, он послал своих слуг к виноградарям взять свои плоды:

Виноградари, схватили слуг его, иного прибили, иного убили, а иного побили камнями.

Опять послал других слуг, больше прежнего; и с ними поступили так же.

Наконец, послал он к ним своего сына, говоря: постыдятся сына моего.

Но виноградари, увидевши сына, сказали друг другу : это наследник ; пойдём, убьём его и завладеем наследством его .

И схвативши его, вывели вон из виноградника и убили.

Итак, когда придёт хозяин виноградника, что сделает он с этими виноградарями?

Говорят Ему: злодеев сих предаст злой смерти, а виноградник отдаст другим виноградарям, которые будут отдавать ему плоды во времена свои». (Евангелие от Матфея, гл . 21 , ст. 33 – 41 .)

Лев Николаевич Толстой считал исполнение людьми заповедей Христа делом первостепенной важности и в своём романе «Воскресение» написал: «Нехлюдов сознавал и верил теперь, что всякому человеку больше нечего делать, как исполнять эти заповеди, что в этом – единственный разумный смысл человеческой жизни, что всякое отступление от этого есть ошибка тотчас же влекущая за собой наказание. Это вытекало из всего учения и с особой яркостью и силой было выражено в притче о виноградарях. Виноградари вообразили себе, что сад, в который они были посланы для работы на

Хозяина, был их собственностью; что всё, что было в саду, сделано для них, и что их дело только в том, чтобы наслаждаться в этом саду своею жизнью, забыв о Хозяине и убивая тех, которые напоминали им о Хозяине и об их обязанностях к нему.

То же самое делаем и мы, - думал Нехлюдов, - Живя в нелепой уверенности, что мы сами хозяева своей жизни, что она дана нам для нашего наслаждения. А ведь это очевидно нелепо. Ведь если мы посланы сюда, по чьей-нибудь воле и для чего-нибудь, а мы решили, что живём только для своей радости, и ясно, что нам дурно, как будет дурно работнику, не исполняющему воли Хозяина. Воля же Хозяина выражена в этих заповедях. Только исполняй люди эти заповеди, и на земле установится Царствие Божие, и люди получат наибольшее благо, которое доступно им.

«Ищите Царства Божия и правды Его, а остальное приложится вам». (Л. Н. Толстой цитирует Евангельский текст: **«Ищите же прежде Царства Божия и правды Его, и это всё приложится вам». (Евангелие от Матфея. Гл. 6, ст. 33)).**

А мы ищем остального и, очевидно, не находим его».

Всего шесть слов понадобилось Христу, чтобы выразить суть жизни многих, очень и очень многих людей. Вот эти шесть слов: **«Заботы мира сего и обольщение богатством». (Евангелие от Матфея, гл. 13, ст. 22).** Велик соблазн богатством, но **«горе миру от соблазнов», - говорит Христос в «Новом Завете». (Евангелие от Матфея, гл.18, ст.7).** Чтобы понять глубину этих слов , вспомним чем соблазнилась Россия в 1917 году. Пустые лозунги: мир – народам, земля – крестьянам, фабрики, заводы – рабочим, равенство, братство, свобода, не подкреплённые никакими обязательствами их исполнения, поставили под знамёна революции миллионы. Этот соблазн можно сравнить с соблазном рыбы, хватающей блесну. Подъём личности на высокие ступени развития позволяет видеть и глубинную суть соблазнов и замыслы соблазнителей и это видение оградит человека от соблазнов. В «Новом Завете» мы читаем: **«Опять берет Его диавол на весьма высокую гору, и показывает Ему все царства мира и славу их, и говорит Ему: все это дам Тебе, если падши поклонишься мне. Тогда Иисус говорит ему,**

отойди от Меня, сатана, ибо написано: «Господу Богу твоему покланяйся и Ему одному служи». **Тогда оставляет Его диавол, - и се, Ангелы приступили и служили Ему**» (Евангелие от Матфея, гл. 4, ст. 8 – 11). Одна из причин, по которой не все могут увидеть всю глубину слов Христа заключается в том, что Христос, излагая Своё Учение, принимает во внимание пребывание человека не только в этом мире, но и его последующее пребывание в мире потустороннем после того как человек перешагнёт порог смерти. Многим людям, вступившим на смертный порог, открывалось видение потустороннего мира и, если им удавалось вернуться в этот мир, то, уже понимая относительность ценностей, которые раньше захватывали всё их существо, они полностью меняли свою жизнь.

В «Новом Завете» Христос говорит о том, что ожидает после смерти человека, совершившего в этой жизни тяжкие грехи, говорит об аде. О том, что есть недоступный звону злата Божий Суд, писал Михаил Юрьевич Лермонтов. Наш современник Расул Гамзатов, известный и в нашей стране и за её пределами, свои размышления об аде выразил в стихотворении

Стражники ада

О том на Кавказе поныне
Преданье живёт неспроста,
Что в проклятой Богом теснине
Развёрнуты ада врата.
От века за теми вратами
Посмертно попавшие в ад
С безмолвно кричащими ртами
В огне языкатом горят.
Предел остановок конечных,
И, вдаль устремившие взгляд,
Два горца, два стража извечных,
У врат преисподней стоят.
Черны на обоих одежды,
Как тучи на склонах горы.
Оставь на пороге надежды,
Вступающий в тартарары!
И с огненной бездною рядом
Я встал и спросил часовых:

«Какие грехи наши адом
Караются прежде других?
От предубеждений свободный,
Слыхал я, что первыми в ад
Бросают за грех первородный
Всех прелюбодеев подряд.
А может, вначале пьянчужек
Бросать туда дьявол горазд,
Где бражникам пенистых кружек
Никто никогда не подаст?
А может, почтенные стражи,
Иной существует черёд
И воры возглавить за кражи
Обязаны грешников ход?»
Ответил мне каменный стражник
Чья пепла седей борода
«И вор, и любовник, и бражник
Не первыми входят сюда.
Тому предпочтенье, кто ближним
Устраивал ад на Земле,
Кто действовал словом облыжным,
В чужом восседая седле.
Кто сам от себя отрекался,
Кто правды не высказал вслух,
Кто плакал, смеялся и клялся
Притворнее всех потаскух».
Затем разомкнулись второго
Печального стража уста:
«Лишь тех мы караем сурово,
В ком совесть была нечиста…»
Я вижу, вы стража что надо,
Пусть в мире карается зло…
А если и вправду нет ада,
Создать его время пришло.

Если бы кроме этого стихотворения Расул Гамзатов ничего больше не написал, то уже за одно это стихотворение он заслуживал бы мировой известности.

Недалеко от Иркутска есть большое село Тельма, в котором жили наши близкие знакомые Ляпустины. Когда наша семья жила в Иркутске, то раз или два в год мы обычно навещали их, они тоже приезжали к нам в Иркутск. В Тельме была церковь и, приезжая к Ляпустиным, мы заходили в неё. Служили в ней два старых священника отец Михаил и отец Евгений, оба прошедшие сталинские лагеря. Мне запомнились слова отца Михаила об одной английской королеве, которой в момент смерти открылось видение потустороннего мира, видение ада, и она в ужасе закричала: «Кто продлит мою жизнь хотя бы на час для покаяния, тому отдам полкоролевства». Наверное, мало кто сомневается в том, что королевские особы богаты не только деньгами, но и грехами и, по-видимому, чем больше у человека грехов, тем страшнее ему умирать.

Русский писатель Леонид Николаевич Андреев (1871 – 1919) в своём небольшом произведении «Рассказ о семи повешенных» пишет о душевном состоянии разбойника перед смертной казнью : «Как – то к вечеру, когда зажгли огонь , Цыганок стал на четвереньки посреди камеры и завыл дрожащим волчьим воем . Был он как – то особенно серьёзен при этом и выл так , как будто делал важное и необходимое дело . Набирал полную грудь воздуха и медленно выпускал его в продолжительном дрожащем вое ; и внимательно , зажмурив глаза , прислушивался , как выходит . И самая дрожь в голосе казалась несколько умышленною ; и не кричал он бестолково , а выводил тщательно каждую ноту в этом зверином вопле , полном несказанного ужаса и скорби .

Потом сразу оборвал вой и несколько минут , не поднимаясь с четверенек , молчал . Вдруг тихонько , в землю , забормотал :

- Голубчики , миленькие . . . Голубчики , миленькие , пожалейте. . . Голубчики ! . . . Миленькие ! . . .»

В десятой главе , озаглавленной двумя словами , «Стены падают» , Леонид Андреев пишет о высокообразованном молодом человеке, владеющем несколькими иностранными языками , Вернере . Он пишет о душевном состоянии Вернера за несколько часов до смертной казни : « Вернер вдруг увидел и жизнь и смерть и поразился великолепием невиданного зрелища. Словно шёл по узкому , как лезвие ножа , высочайшему горному хребту и на одну сторону видел жизнь , а на другую видел смерть , как два сверкающих , глубоких , прекрасных моря , сливающихся на горизонте в один безграничный широкий простор » . Наш современник Игорь Львович Бунич (1937 – 2000) в своей исторической хронике «Золото партии» написал о душевном состоянии Ленина незадолго до его смерти : « Старик Парвус снова продемонстрировал Ленину , что никакое дело , особенно финансовое , не терпит дилетантизма . Ленина хватил удар .

Едва оправившись от него , Ленин , вопреки протестам врачей и родных , приказывает , чтобы его отвезли в Кремль , где убеждается , что все его худшие опасения подтвердились . В кабинете произведён тщательный обыск . Вскрыт сейф , откуда изъяты все «архисекретные» документы , включая банковские поручительства , чековые книжки и целая коллекция заграничных паспортов . Исчез и верный Горбунов . . .

Войны – интернационалисты круглосуточно несли караул вокруг роскошного двухэтажного особняка , бывшего загородного дворца великого князя Сергея Александровича , в Горках . В морозную Рождественскую ночь 1923 года они услышали страшный вой , доносившийся , казалось , прямо из – под дома . Стояла глубокая ночь , в небе светила полная луна . Щёлкнув затворами своих испытанных австрийских карабинов , часовые стали сходиться на источник воя , решив , что к особняку подошли из леса волки . Но волков не было . На застеклённой веранде первого этажа в кресле – каталке сидел Ленин , одетый в телогрейку и валенки . Подняв измождённое лицо к луне , он протяжно и дико выл . Злой дух взывал к своим собратьям в космосе , просясь на волю . Он сделал своё дело . . .

В трескучие морозы января 1924 года рабочие заступами и ломами копали котлован под временный мавзолей . Ломом была пробита канализационная труба , но пробоина , схваченная морозом , не была замечена . В первую же оттепель труба лопнула , залив своим содержимым мавзолей . Узнав об этом , томящийся под домашним арестом патриарх Тихон , скорбно заметил : «По мощам и елей»» .

У Фёдора Михайловича Достоевского есть глубокие слова, касающиеся страха: «Страха тоже убегайте, хотя страх есть лишь последствие всякой лжи». (См. Ф. М. Достоевский. Братья Карамазовы).

Второй священник отец Евгений был отрешенным от мира, он многим помогал материально, хорошо знал нашу семью и помогал мне во время учёбы в университете .

2

Начиная рассказывать о своей жизни, скажу, что мой отец Игумнов Пётр Николаевич был учителем математики, а моя мать Игумнова Лидия Васильевна (урождённая Редникова) была заведующей детского сада и занималась воспитанием детей. Моё детство и юность прошли в небольшом городе Иркутской области Алзамае . Когда отец пришёл с войны, родители взяли двух сирот; отец у них погиб на войне, а мать попала под поезд. У нас была большая дружная семья, у родителей было семь детей, пять своих: Василько, Николай, Лидия, Иннокентий и Павел, и двое приёмных: Игорь и Ира, которые были старшими в семье, а мои родные братья и сестра были младше меня. Из семи шесть получили высшее образование.

Когда я был школьником, то как-то мы с Игорем пошли купаться, я тогда ещё очень плохо умел плавать. Я зашёл в воду, меня понесло течение, и я стал тонуть, перед моим мысленным взором пошли картины прожитой жизни. Я захлёбывался и звать на помощь не мог. Игорь вытащил меня из воды и спас мне жизнь. Богом родители были вознаграждены за то, что взяли в свою семью двух круглых сирот. Не помню, учась в университете или уже после окончания университета, в дореволюционной литературе я прочитал, что в момент смерти человека перед его мысленным взором проходят картины прожитой им жизни.

Отец получил на войне сквозное ранение в области груди. Не дожив до шестидесяти, он ушёл из этого мира, не пропустив ни одного дня на работе. Умер он в воскресение. Мама ушла из этого мира в 1996 году. Образы моих родителей и глубокую благодарность им хранит моя память. Царствие им Небесное и Вечная светлая память. Когда родители ушли из этого мира, то задал себе вопрос: «Чем более всего им обязан?» Оценив их труды, заботу о нас, детях, заботу, которая не часто встречается, решил, что более всего обязан им тем, что они воспитывали нас в духе христианского миросозерцания, в духе заповедей Христа.

В детские годы в наше сознание было заложено , что есть Всемогущий Бог – Творец Миров и Вселенных , что Он всё видит и всё знает , знает наши дела , наши мысли и наши намерения , и по достоинству оценит и наши дела , и наши поступки и наши намерения.

В детском возрасте мы знали главную христианскую молитву:

Отче наш, Иже еси на небесех!

Да святится имя Твое, да приидет Царствие Твое,

Да будет воля Твоя, яко на небеси и на земли.

Хлеб наш насущный даждь нам днесь ;

И остави нам долги наша, якоже и мы оставляем

Должником нашим; и не введи нас во искушение,

Но избави нас от лукавого . (см. Евангелие от

Матфея, гл . 6 , ст. 9 – 13).

В детском же возрасте мы знали молитву, которая

называется символом веры:

Верую во единого Бога Отца, Вседержителя,

Творца небу и земли, видимым же всем и невидимым.

И во единаго Господа Иисуса Христа, Сына Божия,

Единороднаго, иже от Отца рожденнаго прежде всех век;

Света от Света, Бога истинна от Бога истинна, рожденна,

Несотворенна , единосущна Отцу , имже вся быша.

Нас ради человек и нашего ради спасения сшедшего

С небес и воплотившегося от Духа Свята и Марии Девы,

И вочеловечшася .

Распятого же за ны при Понтийстем Пилате, и страдавша,

И погребенна .

И воскресшаго в третий день по Писанием .

И возшедшаго на небеса , и сидяща одесную Отца .

И паки грядущаго со славою судити живым и мертвым .

Егоже Царствию не будет конца .

И в Духа Святаго , Господа , Животорящаго , Иже

От Отца исходящаго , Иже со Отцем и Сыном спокланяема

И сславима , глаголавшаго пророки .

Во едину Святую , Соборную и Апостольскую Церковь .

Исповедую едино крещение во оставление грехов.

Чаю воскресения мертвых и жизни будущаго века. Аминь .

У моего дедушки Николая Никандровича и моей бабушки Лидии Александровны было трое детей: Пётр, Николай и Борис, мой отец был старшим. Братья были очень дружны и на протяжении всей жизни помогали друг другу. Лидия Александровна умерла, когда её младшему сыну Борису было два года. Мой отец очень любил своего младшего брата и заменил ему мать. Мой отец учился в гимназии, когда в стране был голод и разруха. После шести или семи часов занятий в гимназии, он работал, чтобы заработать на кусок хлеба и помочь выжить семье.

Родители с утра до вечера работавшие и не допускавшие никакой праздности, воспитывали нас, прежде всего, своим примером, с детства приучали к труду, помогали нам, когда мы сталкивались с трудностями при прохождении школьной программы. К своим именинам и дням рождения мы получали подарки. Когда мне исполнилось 12 лет, отец подарил мне подростковый велосипед. В родительском доме было много книг, изданных до 1917 года, а также много книг, изданных при советской власти. Среди этих книг встречались довольно редкие книги, например, «Новый Завет», изданный в 1907 году, энциклопедический словарь Фёдора Павленкова, изданный в 1910 году и содержащий более трёх тысяч страниц, весьма редкая книга Уильяма Уокера Аткинсона «Воспитание памяти». Уильям Уокер Аткинсон – англичанин, родился он в 1862 году, изучал философию Индии и был учеником индийского святого Свами Вивекананды. Эпиграфом к своей книге он поставил слова: «Воспринимать – подобно воску, удерживать – подобно алмазу». В книге «Воспитание памяти» Аткинсон пишет, что индийские мудрецы достигали того, что их ученики способны были держать в памяти книги, превосходящие объёмом Библию. Весьма полезным для меня было прочтение этой книги. Мой отец любил и высоко ценил великую русскую литературу и европейскую классику и вечерами читал для нас что-нибудь интересное. Если у него не было времени, то читала мама. Много интересного было прочитано ими, когда мы были детьми. Прежде всего, назову Библию, пересказанную детям старшего возраста с 240 иллюстрациями по оригиналам Шнорра, составленную Софьей Дестунис и изданную в 1907 году. Далее назову по памяти хотя бы немногое из того, что родители читали нам и что в те далёкие годы произвело на меня большое впечатление: «Легенды о Христе» (Сельма Лагерлёф), «Поучение Владимира Мономаха своим детям» (содержится в трудах Ушинского), «Степан Ёжик» (рассказ, автор малоизвестный русский писатель Иванович), «Принц и нищий» (Марк Твен), «Робинзон Крузо» (Даниель Дефо), «За лесными сокровищами» (Софья Радзиевская). В нашем доме был фильмоскоп и большая картонная коробка фильмов для него. Все фильмы были в жестяных баночках, размер которых был раза в три меньше небольших консервных баночек и на каждой баночке было написано название фильма. Фильмы были сфотографированными или нарисованными. Среди нарисованных фильмов были чёрно-белые и совершенно великолепные цветные. Плёнка вставлялась в фильмоскоп и проектировалась на экран, висевший на стене. Содержанием фильмов были путешествия, шедевры русской и европейской литературы, а также замечательные сказки. Приведу названия нескольких фильмов: «Семён Дежнев» (Семён Дежнев – открыватель северных окраин России), «Кавказский пленник» (по рассказу Л.Н. Толстого), «Прыжок» (по рассказу Л.Н. Толстого), «Козетта» (по В.Гюго), «Гаврош» (по В.Гюго), «Василиса прекрасная» (русская сказка), «Кот в сапогах» (французская сказка). Будучи детьми, все эти фильмы мы смотрели с большим интересом. Когда мы были дошкольниками и школьниками к Рождеству Христову родители всегда ставили ёлку, которую мы сами наряжали изумительными игрушками, сделанными до революции. Мама замечательно готовила, к праздникам всегда пекла пироги, плюшки, ватрушки, торты. В доме была мороженица и к праздникам мама делала из молока и яичных желтков домашнее мороженое, делала также желе. С дореволюционной русской кухней и её секретами маму практически познакомила её мать Александра Петровна Редникова. Кто желает познакомиться с этой кухней, пусть прочитает в книге

Владимира Алексеевича Гиляровского «Москва и москвичи» главу «Трактиры». У нас был сад и огород и летом мы работали на земле. Приобретённые навыки работать на земле очень пригодились нам в нашей дальнейшей жизни.

3

Когда мы были дошкольниками, то ходили в детский сад, о котором у меня остались очень хорошие воспоминания. В детском саду хорошо кормили, был послеобеденный сон, после сна прогулки и уже в детском саду начиналось формирование мировоззрения ребёнка. Наряду с нашей Таней, которая уронила в речку мячик и ёлочкой, которая родилась в лесу, вся старшая группа разучивала и пела песни о Сталине и Ворошилове. О Ворошилове мы разучивали песню Лейбо Квитко

Письмо Ворошилову

Климу Ворошилову письмо я написал,
Товарищ Ворошилов – народный комиссар!
В Красную армию в нынешний год,
В Красную армию брат мой идёт!
Товарищ Ворошилов, ты, верно, будешь рад,
Когда к тебе на службу придёт мой старший брат.
Нарком Ворошилов, ему ты доверяй:
Умрёт он, а не пустит врага в Советский край!
Слышал я, фашисты задумали войну,
Хотят они разграбить Советскую страну.
Товарищ Ворошилов, когда начнётся бой –
Пускай назначат брата в отряд передовой!
Товарищ Ворошилов, а если на войне
Погибнет брат мой милый – пиши скорее мне!
Нарком Ворошилов, я быстро подрасту
И встану вместо брата с винтовкой на посту!
И встанем вместо брата с винтовкой на посту!

Особенно же популярной была песня о молодом красноармейце:

У меня есть шапка со звездой,
Я красноармеец молодой,
Новая винтовка на ремне,
Лихо поскачу я на коне.

И когда заканчивались слова песни, вся группа начинала прищёлкивать языком, воспроизводя звуки, исходящие из-под копыт скачущего коня.

Помню, что когда мне было лет пять, один сверстник отозвал меня в уголок и сказал, что расскажет мне стихотворение, если обещаю ему, что никому это стихотворение рассказывать не буду. После того как пообещал ему стихотворение никому не рассказывать, он мне шёпотом продекламировал:

Когда Ленин умирал, Сталину наказывал:
Много хлеба не давать, сала не показывать.

Содеянное Сталиным приоткрыл Н. С. Хрущёв в своём закрытом докладе на XX – ом съезде партии. Содеянное Лениным и Сталиным открылось в начале девяностых годов прошлого века (см. Игорь Бунич . Золото партии . Историческая хроника. Санкт – Петербург . Sans . 1992) . Когда после детского сада прошло чуть ли не полвека, мы с моим заведующим кафедрой Виктором Григорьевичем Руденко вместе шли с занятий и заговорили о Ленине и Сталине и их деятельности . Он сказал мне, что в школьные и студенческие годы он не мог решить, кто из двух вождей лучше, а я рассказал ему стихотворение , рассказанное мне сверстником в детском саду .

Дома формированием моего мировоззрения занималась моя бабушка Александра Петровна Редникова, очень меня любившая и глубоко и искренне верившая в Бога. Расскажу ещё об одном человеке, оказавшем влияние на формирование моего мировоззрения. Когда был, насколько помню, учеником четвёртого класса, у нас непродолжительное время жила Вика (Виктория Васильевна Ляпустина), она была студенткой и проходила медицинскую практику в больнице. Она подарила мне крестик и «Новый Завет». Мне запомнился её рассказ об одном больном, у которого была последняя стадия туберкулёза, Ершове. Ершов был молодым человеком. Незадолго до смерти он рассказал Вике свою жизнь. Рассказал, что когда он был школьником, он был убеждённым атеистом с врождёнными авантюристическими наклонностями и связался с уголовниками. Уголовники поставили ему условие: или он убивает своих родителей или они убивают его. Он, дорожа своей жизнью, выбирает первое и из отцовской двухстволки убивает своих спящих родителей. Закончив свою исповедь, Ершов сказал: «Перед вами убийца, но вы не бойтесь меня. Сейчас, после того, что мне пришлось пережить, полностью изменилось моё мировоззрение, сейчас я не убью и мухи».

Проблемой отцов и детей занимался не только Иван Сергеевич Тургенев. У Льва Николаевича Толстого есть замечательный рассказ «Сорок лет». В этом рассказе очень богатый отец, давший сыну атеистическое воспитание, стал бояться своего уже взрослого сына. Стал бояться, что сын его убьёт, чтобы ускорить вхождение в наследство. Чтобы предотвратить убийство, он пытается перевоспитать сына и напускает на себя личину глубокой набожности.

4

После детского сада была начальная школа, где нужно было надлежащим образом сидеть на уроках, слушать объяснения учительницы, отвечать у доски, делать домашние задания. К формированию мировоззрения ребёнка здесь относились намного серьёзнее, чем в детском саду. Разучивались стихотворения и песни прежде всего о Сталине. К новому году мы учили стихотворение:

На большой кремлёвской башне
Бьют часы двенадцать раз.
Новый год в кремле встречая,
Сталин думает о нас.
Он желает нам удачи и здоровья в новый год,
Чтоб сильнее и богаче становился наш народ.

Разучивались стихотворения и песни о Ленине и Сталине. Очень хорошо помню стихотворение

Два сокола.

На дубу зеленом, да на том просторном,
Два сокола ясных вели разговоры.
А соколов этих люди все узнали.
Первый сокол – Ленин, второй сокол – Сталин
(повторяли два раза),
А кругом летали соколята стаей.
Ох как первый сокол со вторым прощался,
Он с предсмертным словом к другу обращался:
Сокол ты мой сизый, час пришёл расстаться,
Все труды, заботы на тебя ложатся.
А второй ответил:
Позабудь тревоги, мы тебе клянёмся
Не свернём с дороги.
И сдержал он клятву, клятву боевую,
Сделал он счастливой всю страну родную.

Из стихотворений , которые учили наизусть в начальной школе , моя память хранит также стихотворение

Вспомним лето

Вспомним нынешнее лето,
Эти дни и вечера.
Столько песен было спето
В теплый вечер у костра.
Мы на озеро лесное
Уходили далеко,
Пили вкусное парное
С легкой пеной молоко.
Огороды мы пололи,
Загорали у реки.
И в большом колхозном поле
Собирали колоски.»

5

С пятого класса началось предметное обучение и вначале было непривычно видеть вместо одной учительницы преподавателя по каждому предмету. Школьные программы того времени по физике, химии и математике, конечно, отличаются от сегодняшних школьных программ, но это отличие не столь существенное, как отличие программы по литературе, по которой средняя школа работала во времена Сталина, от программы, по которой она работает сегодня. Сегодня в школьную программу по литературе включены произведения Фёдора Михайловича Достоевского и Александра Исаевича Солженицына. В школьную программу того времени произведения всемирно известного Фёдора Михайловича Достоевского не могли быть включены уже потому, что Ленин Фёдора Михайловича назвал «архискверным». Исключая Достоевского, в школьную программу тех лет были включены произведения очень многих наиболее известных русских писателей: Пушкина, Лермонтова, Гоголя, Толстого, Некрасова, Салтыкова – Щедрина, Тургенева, Чехова, Короленко и других. Гений и гуманизм этих писателей просвещали души учащейся молодёжи. Очень многие согласятся с тем, что математика – наука великая, её истины не поколебали тысячелетия, она учит человека думать, развивает память, внимание, учит человека сосредотачиваться, но пространство её пребывания в человеке ограничивается умом человека. Литература же обращается не только к уму, но и к сердцу и пространство её пребывания в человеке шире и включает ум и человеческое сердце. Блез Паскаль, по-видимому, одним из первых увидел ограниченность интеллекта, его быструю утомляемость и оценил возможности человеческого сердца. Часто мы безошибочно чувствуем то, к чему путём интеллектуальных рассуждений прийти трудно или даже невозможно, т. е. уже наши предчувствия лежат за пределами возможностей интеллекта. О ценностях, на которые обращает внимание человеческое сердце, Блез Паскаль писал так: «Царство ценностей открывает новую область, которая лежит за пределами математики, физики, биологии, словом, всего, что имеет дело с «Сущим». Науки о природе не имеют дела с суждениями о ценностях, они не говорят о том, что справедливо или несправедливо, что добро и что зло, что прекрасно и что отвратительно. Они не имеют дела с тем, что должно быть, они устанавливают только то, что есть». Блез Паскаль считал, что сердце имеет свою логику, которая не известна рассудку, что сердце имеет свой собственный порядок идей, отличный от рассудочного порядка. «Сердце, - говорит Паскаль, - открывает Бога, а вовсе не разум». (См. главу Паскаль в книге Б. П. Вышеславцева «Вечное в русской философии». Издательство имени Чехова. Нью – Йорк, 1955). Продолжая говорить о значимости литературы, отмечу, что с героев литературных произведений молодые люди берут пример, герои литературных произведений помогают молодым людям формировать нравственные ориентиры, герои литературных произведений становятся идеалами, к которым молодые люди стремятся. Далее, говоря о своей учёбе в школе, не буду касаться ни математики, ни других предметов, а ограничусь только литературой. Скажу хотя бы о некоторых гениях русской литературы, с творчеством которых познакомился в стенах школы. Среди перечисленных имён русских писателей имя Владимира Галактионовича Короленко не занимает особого места, но его рассказ «Дети подземелья», который был включён в школьную программу по литературе, тронул мою душу. Имя же Михаила Юрьевича Лермонтова и среди имён гениев занимает почётное место и ещё в далёкие школьные годы запали в мою душу его глубокие и истинные слова о Суде Божьем .

С большими симпатиями относился в свои школьные годы к яркому таланту Николая Алексеевича Некрасова, посвятившего своё творчество простому народу, его нелёгкой доле. Не знаю удавалось ли кому – либо более замечательно охарактеризовать русских крестьян, чем это удалось сделать Николаю Алексеевичу:

Славные люди, радушье их честно,
Лесть им противна, а спесь неизвестна.

Или более коротко и убедительно выразить психологию крепостника:

Закон – моё желание,
Кулак – моя полиция.

В свои школьные годы ещё не задумывался над тем, что Некрасов, в отличии от Достоевского и Пушкина, по-видимому, надеялся на преобразование России с помощью революционного насилия. Гений Пушкина, также как и гений Достоевского глубже большого таланта Некрасова. Александр Сергеевич хорошо понимал, что нет ничего страшнее «русского бунта бессмысленного и беспощадного». Николай Первый намеревался уделить Александру Сергеевичу несколько минут, а проговорил с ним три часа и назвал его умнейшим человеком России. К сказанному о Николае Алексеевиче Некрасове добавлю его обращение к умершей матери:

Увлекаем бесславною битвою,
Сколько раз я над бездной стоял,
Поднимался твоею молитвою,
Снова падал – и вовсе упал!
Выводи на дорогу тернистую!
Разучился ходить я по ней,
Погрузился я в тину нечистую
Мелких помыслов, мелких страстей.
От смеющихся, праздно болтающих,
Обагряющих руки в крови.
Уведи меня в стан погибающих
За великое дело любви!

К этим словам Некрасова добавлю слова очень известного, очень талантливого нашего современника Владимира Семёновича Высоцкого, озвученные его голосом. В его песне «Он не вернулся из боя» есть такие слова:

Наши мёртвые нас не оставят в беде,
Наши павшие как часовые.

И это не пустые слова, они говорят о той высоте, на которую Владимиру Семёновичу удалось подняться. Согласимся, что не каждому дано чувствовать связь между миром, в котором мы живём и тем миром, в который мы уйдём после смерти. Люди, обладающие чувствительными душами, чувствуют влияние своих близких, перешагнувших порог смерти, на их жизнь. Иоганн Вольфганг Гёте писал: «Всякий, кто не верит в будущую жизнь, мёртв и для этой».

Первые впечатления о русской литературе сложились у меня в школе. Наверное, не ошибусь, если скажу, что не только русские считают её великой. Лучшие произведения русских писателей являются шедеврами мировой литературы. Эти шедевры писались не по заказу, да по заказу шедевры писать и нельзя. Об этом очень хорошо сказал Стендаль: «Из под продажного пера никогда ничего не выходило великого».

6

Наша школьная программа по литературе, завершаясь, предусматривала знакомство с творчеством советских писателей и эта программа много часов отводила знакомству с творчеством Алексея Максимовича Горького и Владимира Владимировича Маяковского. По роману Горького «Мать» и поэмам Маяковского «Хорошо!» и «Владимир Ильич Ленин» все советские школьники писали сочинения, а стихи этих классиков советской литературы учили наизусть. О Ленине писали и Горький и Маяковский и другие советские писатели. Алексей Максимович Горький, незадолго до своей насильственной смерти, писал: «Мы в стране, освещённой гением Владимира Ильича Ленина, в стране, где неутомимо и чудодейственно работает железная воля Иосифа Сталина». Когда началась перестройка, у Ивана Алексеевича Бунина о Ленине прочитал совсем не то, что писали о нём Горький и Маяковский. Иван Алексеевич Бунин пишет: «Ленин явил миру как раз в самый разгар своей деятельности нечто чудовищное, потрясающее: он разорил величайшую в мире страну и убил несколько миллионов человек – и всё-таки мир уже настолько сошел с ума, что среди бела дня спорят, благодетель он человечества или нет? На своём кровавом престоле он стоял уже на четвереньках; когда английские фотографы снимали его, он поминутно высовывал язык: ничего не значит, спорят! Сам Семашко брякнул сдуру во всеуслышание, что в черепе этого нового Навуходоносора нашли зелёную жижу вместо мозга; на смертном столе, в своём красном гробу, он лежал, как пишут в газетах, с ужаснейшей гримасой на серо-жёлтом лице: ничего не значит, спорят!» Осенью 2011 года была телепередача о Бунине, в которой говорили об оценке Ленина Иваном

Алексеевичем Буниным. Мало кто в нашей стране знал об этой оценке деятельности Ленина. Если бы о ней знали такие высшие должностные лица нашего государства как Н. С. Хрущёв, то, может быть, страна изменила бы свою идеологическую и экономическую ориентацию.

До двадцатого съезда партии каждое утро советского человека начиналось с исполнения гимна Советского Союза, где были такие слова:

Сквозь грозы сияло нам солнце свободы
И Ленин великий нам путь озарил.
Нас вырастил Сталин на верность народу,
На путь и на подвиги нас вдохновил.

И миллионы людей верили этим словам, а многие верят и сегодня. Русский философ Борис Петрович Вышеславцев (17.10. 1877 – 5. 10. 1954), родившийся в Москве и умерший в Женеве, в статье «Парадоксы коммунизма» пишет: «Социализм есть «опиум для народа» и он погружает в догматический сон, усыпляя разум и совесть» (см. Путь. Орган русской религиозной мысли. Книга 1. Информ – Прогресс. М. 1992).

Иван Алексеевич Бунин хорошо знал Алексея Максимовича Горького, Владимира Владимировича Маяковского и Алексея Николаевича Толстого и опубликовал серию небольших литературных заметок под общим заголовком «Портреты». Эти заметки так и озаглавлены: «Горький», «Маяковский», «Третий Толстой». В заметке, посвящённой Маяковскому, Иван Алексеевич Бунин обвиняет его «в деле растления советских людей, в снижении их нравов и вкусов» и пишет: «Тут не в счёт, конечно, только Горький, пропаганда которого с его мировой знаменитостью, с его большими и примитивными литературными способностями, как нельзя более подходящими для вкусов толпы, с огромной силой актёрства, с гомерической лживостью и беспримерной неутомимостью в ней, оказала такую страшную преступную помощь большевизму поистине в планетарном масштабе». Далее он цитирует Маяковского:

Юноше, обдумывающему житьё,
Решающему – сделать бы жизнь с кого,
Скажу, не задумываясь: делай её
С товарища Дзержинского!

и о Маяковском пишет так: «Он, призывая русских юношей идти в палачи, напоминал им слова Дзержинского о самом себе, совершенно бредовые в устах изверга, истребившего тысячи и тысячи жизней: «Кто любит жизнь так сильно, как я, тот отдаст свою жизнь за других». Е. Н. Егорова в небольшом очерке «Две стороны жизни Дзержинского» пишет: «По словам самого Дзержинского, в детстве он был настроен националистически, мечтал о шапке-невидимке, чтобы, став невидимым, уничтожить всех москалей». И продолжает далее: «Вначале он потерял веру в Бога и стал ненавидеть священников. А «без Бога всё позволено», как писал Достоевский. Поэтому всё, кажущееся плохим, можно разрушить для достижения счастья в собственном понимании, не считаясь со средствами. Ради этой благой цели можно лукавить, обманывать, брать заложников и убивать, даже если «случайно» это будут невиновные женщины, дети, старики, поскольку наказания для облечённого сильной властью на земле нет, а Божьей кары якобы не существует. Несправедливый мир Дзержинский вместе со своими соратниками уничтожал ещё большей несправедливостью, искоренял страдания, причиняя ещё большие страдания и смерть миллионам своих соотечественников. Любя людей вообще, он ненавидел дворян, буржуазию, духовенство, казачество, настороженно относился к крестьянам, не считаясь с тем, что и они все люди, и они имеют право на жизнь и счастье, а не только пролетарии. Поистине, «дорога в ад выстлана благими намерениями»». Автор этих строк – Елена Николаевна Егорова. Елена Николаевна – ведущий научный сотрудник Центрального экономико-математического института РАН, член Союза писателей и Союза журналистов России. В книге «Комитет 300» полковник английской разведки Джон Колеман о Дзержинском пишет следующее: «По-видимому, многие из решений Комитета в отношении человечества вырабатываются на основе философии польского аристократа Феликса Дзержинского, который считал, что люди по развитию стоят чуть выше скота. Будучи близким другом британского разведчика Сиднея Рейли (фактически Рейли контролировал действия Дзержинского в период развития большевистской революции), он часто откровенничал с ним во время запоев. Дзержинский – это тот самый изверг, который возглавлял аппарат красного террора. Однажды во время очередной пьянки он сказал Рейли следующее: «Человек не имеет никакого значения. Посмотрите, что происходит, когда вы морите его голодом. Он начинает поедать своих мёртвых собратьев, чтобы выжить. Человек заинтересован только в своём личном выживании. Только это реально. Вся спинозовская философия – это куча хлама». Далее Джон Колеман пишет, что Рейли проживал на роскошной даче, принадлежащей большевистской элите и, заподозренный в намерении предать огласке размеры помощи Запада Ленину и Троцкому, был убит. (См. Джон Колеман. Комитет 300. М. 2011).

О Маяковском Иван Алексеевич Бунин также пишет и в своём дневнике «Окаянные дни». В записи, датированной «Ночь на 24 апреля», он пишет, что приехав в Петербург, он взял извозчика и поехал на выставку финских картин, устроенную в честь отделения Финляндии от России, а далее пишет: «И на полпути извозчик неожиданно сказал мне то, что тогда говорили уже многие мужики с бородами: - Теперь народ, как скотина без пастуха, всё перегадит и самого себя погубит». Затем описывает выставку финских картин, устроенную в честь этого события, и «восторг, с которым говорили речи финнам по поводу зари свободы, засиявшей над Финляндией».

Эту свободу финны сумели отстоять. С 30 ноября 1939 года по 13 ноября 1940 года продолжалась советско-финская война. Двадцать девятого ноября 1939 года газета «Известия» напечатала стихотворение Лебедева-Кумача.

Кровавые шуты

Кровавые шуты! Довольно вам кривляться,
Пришла пора закрыть ваш гнусный балаган
Мы не позволим вам по-хамски издеваться
Над трупами рабочих и крестьян!
Кончайте ваш спектакль, — довольно лицедейства,
С кровавых морд и лап сотрите пестрый грим!
Есть мера подлости, и есть предел злодейству!
В последний раз мы мирно говорим!
Одумайтесь, пока вас не постигла кара,
Вы в бочки с порохом кладете фитили.
Примеров много есть, что гибнут от пожара

Те, кто его предательски зажгли.
Не ради ваших глаз Союз наш исполинский
Вам лаять позволял, как моськам на слона,
Сберечь от бедствия народ хотим мы финский,
Ведь вам, а не ему нужна война!
С лакейской подлостью прислуживать вы рады,
И, силясь угодить хозяевам своим,
Забыли вы, шуты, что стены Ленинграда
Мы никому затронуть не дадим.
Вы, псы наемные! Себе могилу вырыв,
Клыков не скальте вы на гордый Ленинград —
Священный город наш, где пал наш славный Киров,
Где о борьбе все камни говорят!
Кого зовете вы на дерзкий поединок —
Вы провокаторы, обманщики людей?
Пусть в страхе задрожат поджилки у Хельсинок,
Услышав голос Родины моей!
Пускай протрет глаза лакейская порода!
Велик народный гнев и ярость велика,
И будет гибель тем, кто вызвал гнев народа —
Строителя — бойца — большевика.

Русский мыслитель, историк и публицист Георгий Петрович Федотов (1886–1951), родившийся в Саратове и умерший в Нью-Йорке писал: «Странно, дико сложилась история. Русские войска умирают за своё собственное рабство. Финны сражаются не только за свою свободу, но и за свободу России». Эти строки Георгий Петрович писал во время советско-финской войны. (См. Г.П. Федотов. Судьба и грехи России. М. 2005)

Стихотворение «Кровавые шуты» рассказала мне Саида Васильевна Давиденко – доцент кафедры химии. В январе 1940 года, когда ей было десять лет, она декламировала его на смотре-конкурсе юных талантов в городе Нальчике. Вместе с Саидой Васильевной мы проработали в Пятигорском технологическом университете более двадцати лет. Она мне рассказывала, что когда она приехала в Москву поступать в институт, то из вузов Москвы выбирала вуз, который обеспечивал иногородних студентов общежитием, потому что у неё не было пальто. Рассказ Саиды Васильевны о поступлении напомнил мне, что когда у одной ученицы, с которой вместе учился, учительница потребовала справку за пропуски, она ответила: «Кто же даст мне справку, что у меня нет своей фуфайки?». Фамилия ученицы была Станкевич .

После того как в 1973 году факультет общественного питания Ставропольского политехнического института был переведён в Пятигорск, я начал работать в Пятигорске и моими коллегами были Стелла Васильевна Юрьева и Саида Васильевна Давиденко. Они помогли мне получить квартиру.

По прошествии почти сорока лет узнал, что при утверждении списка очередников на получение квартир, Саида Васильевна, имея ребёнка, согласилась в списке очередников занять своё место после меня. Об этом рассказала Саида Васильевна незадолго до своей смерти. Светлая память о ней и глубокая благодарность ей живут в моей душе. Царствие ей Небесное и Вечная светлая память.

После сделанного отступления о советско-финской войне, и того немногого, что сказал о Стелле Васильевне и Саиде Васильевне, опять обращаюсь к «Окаянным дням» Ивана Алексеевича Бунина. После описания выставки финских картин Иван Алексеевич описывает банкет. Описание банкета содержит сцену массового умопомрачения, сцену массового гипноза, который является как бы прелюдией того массового умопомрачения, которое вскоре после этого банкета постигло Россию. Центральной фигурой на банкете становится Маяковский. Это описание заслуживает того, чтобы привести его полностью: «А затем я был ещё на одном торжестве в честь всё той же Финляндии, - на банкете в честь финнов, после открытия выставки. И, Бог мой, до чего ладно и многозначительно связалось всё то, что я видел в Петербурге, с тем гомерическим безобразием, в которое вылился банкет! Собрались на него всё те же – весь «цвет русской интеллигенции», то есть знаменитые художники, артисты, писатели, общественные деятели, новые министры и один высокий иностранный представитель, именно посол Франции. Но над всеми возобладал поэт Маяковский. Я сидел с Горьким и финским художником Галленом. И начал Маяковский с того, что без всякого разрешения подошел к нам, вдвинул стул между нами и стал есть с наших тарелок и пить из наших бокалов. Галлен глядел на него во все глаза – так, как глядел бы он, вероятно, на лошадь, если бы её, например, ввели в эту банкетную залу. Горький захохотал. Я отодвинулся. Маяковский это заметил. – Вы меня очень ненавидите? – весело спросил он меня. Я без всякого стеснения ответил, что нет: слишком много было бы чести ему. Он уже было раскрыл свой корытообразный рот, чтобы ещё что-то спросить меня, но тут поднялся для официального тоста министр иностранных дел, и Маяковский кинулся к нему, к середине стола. А там он вскочил на стул и так похабно заорал что-то, что министр оцепенел. Через секунду, оправившись, он снова провозгласил; «Господа!» Но Маяковский заорал пуще прежнего. И министр, сделав ещё одну и столь же бесплодную попытку, развёл руками и сел. Но только он сел, как встал французский посол. Очевидно он был вполне уверен, что уже перед ним-то русский хулиган не может не стушеваться. Не тут-то было! Маяковский мгновенно заглушил его ещё более зычным рёвом. Но мало того: к безмерному изумлению посла, вдруг пришла в дикое и бессмысленное неистовство и вся зала: заражённые Маяковским, все они ни с того ни с сего заорали и себе, стали бить сапогами в пол, кулаками по столу, стали хохотать, выть, визжать, хрюкать – и тушить электричество. И вдруг всё покрыл истинно трагический вопль какого-то финского художника, похожего на бритого моржа. Уже хмельной и смертельно бледный, он, очевидно, потрясённый до глубины души этим излишеством свинства, и желая выразить свой протест против него, стал что есть силы и буквально со слезами кричать одно из немногих русских слов, ему известных:

Много! Много! Много! Много!

И ещё одно торжество случилось тогда в Петербурге – приезд Ленина. «Добро пожаловать!» - сказал ему Горький в своей газете. И он пожаловал – в качестве ещё одного притязателя на наследство. Притязания его были весьма серьёзны и откровенны. Однако, его встретили на вокзале почётным караулом и музыкой и позволили затесаться в один из лучших петербургских домов, ничуть, конечно, ему не принадлежащий. «Много»? Да как сказать? Ведь шёл тогда у нас пир на весь мир, и трезвы-то на пиру были только Ленины и Маяковские».

В свои школьные годы, конечно, не знал и не мог знать того, что писал Бунин о Ленине, Горьком и Маяковском. Иван Алексеевич Бунин – первый русский лауреат нобелевской премии по литературе. В 1903 году он предсказал все три русские революции, а 16 февраля 1924 года более чем за 17 лет до начала Великой Отечественной войны, с непоколебимой убеждённостью предсказал судьбу нашей северной столицы. Когда началась перестройка на прилавках книжных магазинов появились не только «Окаянные дни» Ивана Алексеевича Бунина, произведения Александра Исаевича Солженицына, Варлама Шаламова, но и таких неизвестных в нашей стране авторов как Роберт Конквест, Джордж Оруэлл, Энтони Саттон и другие. Заканчивая рассказывать об учёбе в школе, о своих впечатлениях о русской литературе, о великих русских писателях, включённых в программу средней школы, хотелось бы сказать хотя бы немного о великом гражданине России, ныне уже ушедшем из этого мира, великом писателе двадцатого столетия, нобелевском лауреате по литературе Александре Исаевиче Солженицыне. Мысли и идеи, содержащиеся в его произведениях, вызывали и вызывают в моей душе глубокие симпатии. В 1974 году Александр Исаевич написал маленькую публицистическую статью «Жить не по лжи». Уже за одну эту статью его можно считать Совестью России. Начинает эту статью он словами: «Когда-то мы не смели и шёпотом шелестеть. Теперь вот пишем и читаем Самиздат». Молодые люди сегодня, по-видимому, не очень ясно представляют себе, что такое Самиздат. Самиздат появился в нашей стране после двадцатого съезда партии. Самые различные авторы плоды своего свободного творчества в области литературы, религии, политики, экономики печатали на пишущих машинках и давали читать своим знакомым, которым доверяли, а те – своим и так распространялся Самиздат по стране. Власть уже не могла осуществлять такого жёсткого контроля над своими гражданами, который был во времена Сталина. В статье «Жить не по лжи» Александр Исаевич пишет о разговорах на кухнях, которые сводятся к тому, что во всём виноваты они, в их руках аппарат насилия, мы же не можем ничего. Они – это власть, мы – все остальные. «Никакие не «они» во всём виноваты – м ы с а м и, только мы!», - утверждает Александр Исаевич. Он утверждает, что если в людях не будет правды, то не будет и достойной жизни. Представим себе, что должностное лицо, наделённое высокими полномочиями, идя по улице, предложило бы встретившимся ему ста прохожим выбирать между большой принципиальной правдой и большой реальной выгодой. Процент выбравших правду, по-видимому, был бы весьма мал, столь же малы и наши шансы на улучшение жизни. Пока выгода в глазах людей является ценностью более значимой и высокой, чем правда, пока у людей нет ясного понимания, что если нет правды, то не будет и достойной жизни, на обнадёживающее улучшение нашей жизни надеяться не приходится. Александр Исаевич пишет: «Мы так безнадёжно расчеловечились, что за сегодняшнюю скромную кормушку отдадим все принципы, душу свою, все усилия наших предков, все возможности для потомков – только бы не расстроить своего утлого существования». И Александр Исаевич Солженицын и Георгий Петрович Федотов фактически говорят об одном и том же, что причины наших бед в нас самих, мы слишком далеко отошли от заповедей Христа. Георгий Петрович пишет: «Трижды отреклась Русь от своего древнего идеала святости, каждый раз обедняя и уродуя свою христианскую личность. Первое отступничество – с поколением Филофея, второе – с Петром, третье – с Лениным. И всё же она сохраняла подспудно свою верность – тому Христу, в которого она крестилась вместе с Борисом и Глебом – страстотерпцами, которому она молилась с кротким Сергием. Лампада Преподобного Сергия, о которой говорил Ключевский, ещё теплилась до наших дней. И вот теперь. Когда всей туче большевистских бесов не удалось задуть её, вызывают, как Вия, из гроба старца Филофея: не задует ли он?». После крещения Руси русским идеалом была Святая Русь. Старец Филофей подменил этот идеал идеалом православного царства. О том, как по мере отступления от заповедей Христа деградировала христианская душа, Георгий Петрович пишет так: «Подвижники, юродивые, страстотерпцы обернулись опрощенцами, народниками, мучениками за волю и счастье народа. Хотя отступничество от имени Христа не прошло и для них даром. Мрачные тени легли на иконописные лики безбожных праведников. Искажение, потом разложение христианской души уже началось – в диалектике революции. В большевизме этот процесс разложения закончился. Ему удалось воспитать поколение, для которого уже нет ценности человеческой души – ни своей, ни чужой. Убить человека – всё равно что раздавить клопа». Первым шагом к очищению Александр Исаевич считает о т к а з о т л ж и . Ясно усматривая связь между ложью и насилием, он пишет: «Но насилие быстро стареет, немного лет – оно уже не уверено в себе, и, чтобы держаться, чтобы выглядеть прилично, - непременно вызывает себе в союзники Ложь. Ибо насилию нечем прикрыться, кроме лжи, а ложь может держаться только насилием. И не каждый день, не на каждое плечо кладёт насилие свою тяжёлую лапу; оно требует от нас только покорности лжи, ежедневного участия во лжи – и в этом вся верноподданность.

И здесь-то лежит пренебрегаемый нами, самый простой, самый доступный ключ к нашему освобождению: л и ч н о е н е у ч а с т и е в о л ж и! Пусть ложь всё покрыла, пусть ложь всем владеет, но в самом малом упрёмся: пусть владеет н е ч е р е з м е н я!

И это – прорез во мнимом кольце нашего бездействия! – самый лёгкий для нас и самый разрушительный для лжи. Ибо когда люди отказываются ото лжи – она просто перестаёт существовать. Как зараза она может существовать только на людях.

Не призываемся, не созрели мы идти на площади и громогласить правду, высказывать вслух, что думаем, - не надо, это страшно. Но хоть откажемся говорить то, чего не думаем!

Вот это и есть наш путь, самый лёгкий и доступный при нашей проросшей органической трусости, гораздо легче (страшно выговорить) гражданского неповиновения по Ганди.

Наш путь: н и в чём н е п о д д е р ж и в а т ь л ж и с о з н а т е л ь н о !»

Александр Исаевич упоминает великого сына Индии Ганди. Ганди без выстрелов освободил Индию от англичан. Авторитет Ганди в Индии был непререкаемый. Обращаясь к массам индусов, он никогда не называл англичан врагами. Он говорил, что англичане – наши братья, что они прекрасные технические специалисты, что они будут работать у нас, мы же будем достойно платить им и учиться у них, но наша страна Индия и управлять ей будем мы – индусы. Следует заметить, что Ганди был противником христианства, поскольку ему случалось видеть недостойное поведение английских миссионеров. Но когда он прочитал «Новый Завет», он был потрясён. Ганди читал его каждый день и английскому премьеру говорил, что мы могли бы сойтись с вами на принципах Нагорной Проповеди. Считают, что именно Ганди удалось провести учение Христа в жизнь.

Александр Исаевич пишет, что и этот путь: не лгать, не поднимать голосующей руки, не подписываться под тем, что не согласуется с убеждениями будет нелёгкий, но самый лёгкий из возможных и заканчивает свою статью словами: « Если и в этом мы струсим, то мы – ничтожны, безнадёжны, и это к нам пушкинское презрение:

К чему стадам дары свободы?

…………………………………………

Наследство их из рода в роды

Ярмо с гремушками и бич».

Статья «Жить не по лжи» Была написана нашим великим современником 40 лет назад. Она была актуальна тогда, она очень актуальна и сегодня. Приведу ещё небольшой фрагмент из «Нового Завета», где Христос говорит о лжи и о том детищем кого она является. В этом фрагменте Христос обращается к иудеям, замышляющим убить Его: «**Иисус сказал им: если бы Бог был Отец ваш, то вы любили бы Меня, потому что Я от Бога исшёл и пришёл; ибо Я не Сам от Себя пришёл, но Он послал Меня. Почему вы не понимаете речи Моей? Потому что не можете слышать слова Моего. Ваш отец диавол, и вы хотите исполнять похоти отца вашего; он был человекоубийца от начала и не устоял в истине, ибо нет в нём истины; когда говорит он ложь, говорит своё, ибо он лжец и отец лжи**». (Евангелие от Иоанна, гл. 8, ст. 42 – 44). Нельзя отрицать, что мало людей, которые не лгут совсем. Александр Исаевич пишет, что когда в нашей стране таких людей будут десятки тысяч, нашу страну нельзя будет узнать. В молодом возрасте я прочитал замечательный рассказ «Я не могу лгать». Рассказ этот о Георге Вашингтоне. Когда Георгу было 12 лет отец подарил ему маленький топорик и у Георга возникло непреодолимое желание попробовать топорик в действии. Он идёт в сад и срубает молодое вишнёвое деревце. Когда отец обнаруживает срубленное деревце, он спрашивает у Георга: «Кто это сделал?». Георг ответил: «Мне трудно признаться, но я не могу лгать». В рассказе утверждается, что Георг Вашингтон не лгал в течении всей своей жизни.

Наверное, не ошибусь, если скажу, что роман Солженицына «Раковый корпус» не относится к числу произведений, читаемых большой читательской аудиторией. В этом романе автор почти не касается вопросов политики и надеялся даже опубликовать его в советской печати. Этот роман, наряду с другими произведениями Александра Исаевича, произвёл на меня большое впечатление. Автор романа сам прошёл через раковый корпус. Пришёл он туда, будучи смертельно больным раком, а вышел оттуда здоровым. Такое, наверное, случается с одним из миллионов больных этой смертельной болезнью. Здесь, по-видимому, произошло вмешательство Высших Сил. Читая «Раковый корпус», обратил внимание на Павла Николаевича, одного из главных героев этого романа. Павел Николаевич – небольшой функционер, но у него связи вплоть до звонков в ЦК. Павел Николаевич лежит в раковом корпусе, а вокруг его шеи обвилась раковая опухоль. Он тяжело дышит, как рыба, вынутая из воды, и временами теряет сознание. Приходя в сознание, он чувствует, что уходит из этого мира и те связи, которыми он располагает, бесполезны. Бесполезны даже звонки в ЦК. Впервые в жизни он искренне обращается к Богу и спрашивает: «За что, Господи, за что?». И вспоминает, что, будучи ещё молодым чиновником, он написал донос на соседа инженера и сгубил человека. Раскаиваясь в совершённом поступке, он думает, что стоило ли ради шестнадцати квадратных метров в коммунальной квартире идти на это преступление?! Представляя в своих произведениях в художественной форме случаи, происходившие в реальной жизни, Александр Исаевич пытается довести до сознания читателей то, что когда преступник совершает преступление, он тогда ещё не знает, чем придётся рассчитываться: раковой койкой, смертью детей или ещё чем-то, а рассчитываться обязательно придётся, потому что этот закон Господь Бог положил в основу мироздания. Хорошо известно как рассчитывались за содеянное многие самые видные деятели революции. Ни Каменеву, ни Зиновьеву, ни Троцкому, ни другим членам ленинского ЦК, поднявшимся на вершины власти, не удалось избежать Суда Божьего. В «Архипелаге ГУЛАГ» Александр Исаевич пишет, что когда Николай Иванович Бухарин входил в ближайшее окружение Сталина, не знал тогда ещё Николай Иванович, что готовит ему запасливая судьба. Не знал об этом и Николай Васильевич Крыленко, которого Александр Исаевич называет пламенным революционером и который выступал обвинителем на самых громких судебных процессах, не знали об этом и другие участники революции. Как же был прав Михаил Юрьевич Лермонтов, писавший, что есть Божий Суд. По заслугам воздаёт людям Тот, Кто и мысли и дела – всё знает наперёд.

О том, что есть Божий Суд, писали и другие русские писатели. Например, у Александра Ивановича Куприна есть рассказ «С улицы». В этом рассказе бродяга рассказывает писателю свою жизнь. За прожитую жизнь бродяга накопил большой список грехов, который заканчивается убийством. Подытоживая прожитую жизнь, бродяга говорит: «Никакое зло на сем свете не пропадает. Если ты ещё мальчишкой у жука крылья оторвал, то и это тебе зачтётся и приложится. Господь Бог нам всем, у Себя наверху, двойную итальянскую бухгалтерию ведёт: приход и расход – всё у Него разнесено по графам». Заканчивается этот рассказ следующими, заслуживающими внимания, словами бродяги: «Все мы у Господа Бога нашего квартиранты. Но одни занимают бельэтаж и платят за десять лет вперёд, и старший дворник при виде их не знает, как ему лучше кувыркнуться. Другие живут себе под крышей, но честно, аккуратно, и просрочку считают для себя несмываемым позором. Есть и такие, которые самовольно контракт разрывают…». Рассказ «С улицы» Александр Иванович Куприн написал в 1904 году. Словами «все мы у Господа Бога нашего квартиранты» Куприн выражает своё понимание положения людей в этом мире.

Когда человеку причиняют зло, то обычно возмущается всё его существо и у человека возникает страстное желание отомстить обидчику. О мести апостол Павел говорит следующее: «**Не мстите за себя, возлюбленные, но дайте место гневу *Божию*. Ибо написано: «Мне отмщение, Я воздам», - говорит Господь».** (Послание к римлянам святого апостола Павла, гл. 12, ст. 19). **«Мне отмщение, и Аз воздам»** (церковно – славянский текст). Перевод на русский язык: **«На Мне лежит отмщение, и оно придёт от Меня».**

Блез Паскаль писал: «Я один против тридцати тысяч? – Нет. Пусть на вашей стороне будет двор, обман, на моей стороне истина: она вся моя сила; если я её потеряю, я погиб. Не будет недостатка ни в обвинениях, ни в преследованиях. Но истина у меня и посмотрим, кто победит». (См. Тарасов Б. Н. Паскаль. Изд. Молодая гвардия. М. 1979). Человека, отстаивающего истину, можно убить, но идеи, которые он отстаивает, нельзя низложить. То, что приведённые слова великого Паскаля истинны, доказал Александр Исаевич Солженицын. Он выступил против системы, обладавшей могучим аппаратом насилия и вышел победителем. Блезу Паскалю принадлежат и следующие великие слова: «Страшная это и продолжительная война, когда насилие пытается подавить истину. Все старания насилия не могут ослабить истины, а только служат к её возвышению». (См. Тарасов Б. Н. Паскаль. Изд. Молодая гвардия. М. 1979). Эти слова Блез Паскаль писал более трёх с половиной столетий назад. Они были актуальны в его время, не менее актуальны они и в наше время, поскольку ещё для многих людей авторитет насилия выше авторитета истины.

7

В 1958 году я закончил школу №19 города Иркутска имени А. П. Чехова и поступил на математическое отделение физико-математического факультета Иркутского государственного университета. В этой школе я учился вместе с моим братом Николаем, младшим меня на два года. У нас тогда ещё не было дома в Иркутске и мы с братом жили на квартире у Серафимы Васильевны Егорушкиной. Егорушкины были очень близки нам. Муж Серафимы Васильевны Василий Тихонович Егорушкин был репрессирован 3 марта 1938 года и в документе о его реабилитации ничего не говорится о том, как закончилась его жизнь. У Василия Тихоновича и Серафимы Васильевны было двое детей, старший Вадим Васильевич умер в молодом возрасте, а младший Донар Васильевич был физиком и работал на кафедре физики в Иркутском политехническом институте. Обладая высоким профессионализмом и редкой добротой, в институте он пользовался большим заслуженным уважением. Нам он помогал и материально и всегда помогал когда мы сталкивались с трудностями по физике и относится к числу тех людей, которые не забываются в течении всей жизни. В Иркутске в советское время было много вузов и целый район города занимал студгородок. В студгородке у Донара Васильевича была квартира, где он жил с семьёй. Его жена Алла Альфредовна работала в медицинском институте. У них было двое детей - дочь Женя и сын Саша. Алла Альфредовна успевала и на работе и дома, замечательно готовила, мы часто к ним приходили и всегда попадали за их хлебосольный стол.

Серафима Васильевна жила одна, она сосредоточила на нас своё внимание и заботу и заботилась о нас как о своих детях. Жила она в коммунальной квартире, которая состояла из трёх комнат и большой кухни. Квартира находилась на первом этаже бывшего дворянского двухэтажного особняка. Одну комнату занимала Серафима Васильевна, вторую – Людмила Михайловна Шипунова со своей матерью Зинаидой Петровной, а третью – Лидия Алексеевна Хайдукова. Все жильцы этой квартиры были пенсионного возраста, высококультурными и очень доброжелательными людьми. Самой старшей была Зинаида Петровна. Она была дочерью генерала Брагина, которого Николай Первый направил служить в Иркутск, в молодые годы она получила дворянское воспитание. Скажу хотя бы немного о соседях Серафимы Васильевны. Соседям Серафимы Васильевны мы с Колей оказывали небольшое внимание, например, приносили им воду с колонки, которая находилась метрах в пятидесяти от дома. Относились они к нам с искренней доброжелательностью. Всякий раз когда занимались домашней выпечкой, угощали нас, по праздникам приглашали к себе обедать. Людмила Михайловна и Зинаида Петровна были дворяне. До 1917 года весь особняк принадлежал им. Когда мы бывали у них в гостях, они много рассказывали нам о своей жизни до 1917 года. Зинаида Петровна рассказывала нам, что она видела Николая Второго, когда тот был ещё наследником престола. Очень запомнился нам рассказ Людмилы Михайловны о том, как они с Зинаидой Петровной бежали от революции. Своё решение оставить Иркутск и свой дом они приняли тогда, когда границу можно было перейти уже только по таёжным тропам. Буряты в Сибири занимались охотой и скотоводством, они хорошо знали сибирские таёжные тропы и проводником двух женщин, решивших перейти границу, был бурят. Покидая родину и оставляя родной дом, они, конечно, взяли с собой то, что можно было взять и Людмила Михайловна своим чутким женским сердцем безошибочно чувствовала как диавол искушает их проводника и рисует перед его воображением картины счастья и убеждает проводника в том, что всё это счастье будет реальной действительностью, если он убьёт следуемых за ним беззащитных женщин и завладеет тем, что они взяли с собой. Продолжая рассказывать об этом рискованном переходе, Людмила Михайловна говорила, что вся её душа была погружена в молитву и эта молитва спасла их, не позволив проводнику переступить порог дозволенного, и они благополучно перешли границу. Перейдя границу, они очень достойно расплатились с проводником, которому вверили свою жизнь, и через какое – то время добрались до Харбина. В Харбине Людмила Михайловна вышла замуж за Михаила Шипунова, отвергнув брак по расчёту с очень богатым немцем. Далее обстоятельства сложились так, что ей с двумя маленькими детьми, мужем и матерью пришлось возвратиться в Советский Союз ещё при жизни Сталина. Людмила Михайловна с семьёй приехала в Иркутск в свой родительский дом, но теперь им пришлось разместиться только в одной комнате коммунальной квартиры. Не прошло и недели после их приезда в Иркутск, как арестовали её мужа. Его судьба ей неизвестна. Дети Юличка и Танечка очень любили отца, были очень к нему привязаны и на вопросы детей об отце мать отвечать словами была не в состоянии, слова не озвучивались и вместо ответов дети видели рыдания матери. После ареста отца дети заболели и умерли. Донар Васильевич говорил нам, что дети были редкого обаяния и очаровывали всех соседей.

Третью комнату занимала Лидия Алексеевна Хайдукова. Она была медицинским работником, но точно не знаю врачом или медицинской сестрой. Замужем она была за офицером и разделяла с ним тяготы его армейской службы. Когда её муж дослужился до генеральского чина, ей было уже за пятьдесят, и мужа взяла в плен молодая женщина. Лидия Алексеевна оставила мужа со своей любовницей и уехала из Москвы. Муж ей ежемесячно посылал денежные переводы. Деньги она не копила, тратила их в основном на питание. Женщины приносили ей высококачественные продукты, за которые она с ними щедро расплачивалась. Одна женщина, которую за глаза называли «рыбница», постоянно приносила ей замечательную ангарскую рыбу. Лидия Алексеевна была человеком широкой доброй русской души и постоянно щедро нас угощала. Она часто приходила к Серафиме Васильевне, приносила изумительно вкусную жареную рыбу и мы все вместе обедали.

Каждый день Серафима Васильевна рано вставала, кормила нас завтраком и мы с Колей отправлялись в школу. Когда мы приходили из школы, у Серафимы Васильевны всегда уже был готов обед, всегда замечательный, всегда очень вкусный. Завтраки, обеды и ужины Серафима Васильевна как и её соседи, готовила в кухне. В кухне стояла большая русская печь, которая в основном использовалась для домашней выпечки, обеды же готовились на керосинках. В кухне стояли три стола и на каждом столе стояла керосинка. Мы помогали Серафиме Васильевне, правда, очень немного. В квартире было печное отопление. Мы кололи дрова, приносили их в коридор и складывали около печки, которая отапливала комнату Серафимы Васильевны, приносили также с колонки воду. Донару Васильевичу , Алле Альфредовне и Серафиме Васильевне мы очень обязаны , они помогали нам и когда мы были ещё школьниками и когда были студентами , помогали нам получить образование , оказывали всестороннюю помощь и поддержку и для нас незабываемы . Царствие им Небесное и Вечная светлая память .

8

Многим кажется, что по мере увеличения их возраста, время ускоряет свой бег. Годы учёбы в университете шли быстрее, чем годы учёбы в школе. В университете работало много замечательных преподавателей, замечательных и в смысле профессионализма и в смысле высоких человеческих качеств. И сейчас хорошо помню свой ответ на экзамене по политэкономии. Отвечая на вопрос билета оговорился и сказал: «Переход от социализма к капитализму». Фамилия экзаменатора была Башаров, как его звали уже не помню, с лекторами по общественно – политическим дисциплинам мы, студенты, встречались только на лекциях и на экзаменах. Наш лектор по политэкономии был очень спокойным и доброжелательным человеком, он сразу меня поправил, сказав: «Переход от капитализма к социализму», внимательно дослушал до конца мой ответ и, не задавая мне никаких дополнительных вопросов, поставил оценку отлично. Тогда, конечно, никто не знал, что в 1991 году распадётся страна и начнётся переход от социализма к капитализму.

Наверное, где – то в глубинах памяти хранятся номера всех билетов, которые попадались мне на экзаменах и вопросы, которые в них содержались, но сейчас, конечно, всего этого не помню. Однако, моя память до сих пор удерживает экзаменационные вопросы, которые были на экзаменах по некоторым предметам. Когда сдавал экзамен по дифференциальным уравнениям Владимиру Владимировичу Васильеву, в моём билете были особые решения дифференциальных уравнений. Когда сдавал экзамен по теории функций действительной переменной Игорю Дмитриевичу Степанову – был интеграл Лебега. Когда сдавал экзамен по теории функций комплексной переменной Юрию Фёдоровичу Харкиевичу – был ряд Лорана. Когда сдавал экзамен по аналитической геометрии Ие Николаевне Снятиновской, то после ответа на вопросы билета, она попросила меня доказать, что уравнение y=0 представляет собою уравнение оси x. Хорошо помню как сдавал свой первый зачёт. Это был зачёт по высшей алгебре, сдавал его Марине Александровне Дмитриевой.

В начале 2012 года получил письмо от Любови Яковлевны Ланиной, Любовь Яковлевна читала в университете дифференциальную геометрию. Любовь Яковлевна написала, что ушла из этого мира Таисия Ивановна Назаренко. Таисия Ивановна вела занятия по математическому анализу, проводила занятия она замечательно и её светлый образ хранит моя память.

Как – то Иркутский университет пожелали посетить англичане. Была зима и Иркутск был завален снегом. Они с трудом добрались до университета и у них создалось впечатление, что они попали в какой – то медвежий угол. Но когда они встретились с заведующей кафедрой иностранных языков, которая училась в Англии, их мнение об университете сразу же изменилось.

Образы многих преподавателей и сегодня живут в моей памяти. Большинство преподавателей, работавших в университете, имели большой опыт работы в стенах высшей школы. Лекции читали замечательно, у меня долго хранились тетради с записями их лекций. Всем моим университетским преподавателям глубоко благодарен за высокий профессионализм, за серьёзное качественное обучение, за очень ответственное отношение к своей работе и за доброжелательность. Одним из моих университетских преподавателей был Феодосий Алексеевич Шелковников, его знал ещё до поступления в университет. Феодосий Алексеевич был другом моего отца, они вместе учились, дружбу они пронесли через всю свою жизнь. После окончания Иркутского университета он был аспирантом известного советского математика Виктора Владимировича Немыцкого, а затем доцентом Иркутского университета. Феодосий Алексеевич совместно с Константином Георгиевичем Такайшвили написал задачник по операционному исчислению, которым пользуются студенты и сегодня. В то время, когда учился в университете были только первые электронные вычислительные машины, они были очень громоздкими, занимали большие площади, никаких калькуляторов не было и наиболее популярной и надёжной вычислительной машиной был арифмометр. Феодосий Алексеевич дал мне свой арифмометр, который очень помогал мне при решении задач, связанных с вычислениями, очень помог при выполнении задания по теории интерполирования. Основную часть университетского курса составляли математические дисциплины, но кроме математики была физика и большой курс теоретической механики. Аналитическую геометрию, линейную алгебру, высшую алгебру, теорию групп читала Нина Константиновна Васильева, математический анализ читали Юрий Фёдорович Харкиевич и Феодосий Алексеевич Шелковников, дифференциальные и интегральные уравнения читал Владимир Владимирович Васильев, дифференциальную геометрию читала Любовь Яковлевна Ланина, теорию функций комплексной переменной читал Юрий Фёдорович Харкиевич, теорию функций действительной переменной читал Игорь Дмитриевич Степанов, теорию вероятностей читал Михаил Леонидович Платонов, уравнения математической физики читал Константин Георгиевич Такайшвили. Курс теоретической механики был три семестра, читал этот курс Геннадий Николаевич Бугаевский. Все преподаватели очень ответственно относились к своей работе и лекции читали замечательно. Если после окончания лекции студент подходил к преподавателю с вопросом, преподаватель обычно его внимательно выслушивал, отвечал на вопрос, иногда рекомендовал дополнительную литературу, отношение было самое доброжелательное. На экзаменах преподаватели предъявляли к студентам весьма высокие требования, обстоятельно беседовали с каждым студентом, не жалели своего времени и иногда экзамен заканчивался вечером. Всех моих университетских преподавателей, имена которых назвал и имена которых не назвал, вспоминаю с чувством глубокой благодарности, вспоминаю как слушал их лекции, как сдавал им экзамены. В курсе теоретической механики познакомился с законами Кеплера, весьма значимыми для моего мировоззрения. Всемирно известный немецкий математик и астроном Иоганн Кеплер (1571 – 1630) свой фундаментальный труд о гармонии мира закончил словами: «Благодарю Тебя, Творец и Владыка, что Ты сподобил меня радости восхищаться делами Рук Твоих». Я учился в университете в то время когда страну возглавлял Никита Сергеевич Хрущёв. В стране чувствовалось пробуждение после длинной сталинской ночи, велось большое жилищное строительство, страна первой в мире вышла в космос.

Назвав имена многих моих университетских преподавателей, отдельно назову Петра Ивановича Головачика, имя которого, наряду с именами других очень достойных профессионалов, занимавшихся моим образованием, всегда вспоминаю с чувством глубокой благодарности. Когда учился в университете Петру Ивановичу было или около тридцати или за тридцать, он преподавал в университете и занимался написанием докторской диссертации. В детстве он, по-видимому, получил строгое христианское воспитание, которое помогло ему сосредоточить своё внимание на математике, отдавая ей своё время, силы и здоровье. Воспитание в духе заповедей Христа с детства учит человека отвечать за свои поступки. Обычно люди, получившие такое воспитание, не отдают себя в смертельно крепкие объятия таких «друзей» как курение, алкоголизм, тем более не становятся рабами наркотиков, хорошо понимая, что все эти пороки напоминают приживальцев, которые поселившись как бы временно, остаются уже навсегда. Когда получил диплом об окончании университета, Пётр Иванович посоветовал мне обратиться по вопросу устройства на работу на кафедру математического анализа Иркутского педагогического института. Уже когда работал на кафедре в должности ассистента, мои коллеги мне сказали, что своим устройством на работу обязан Петру Ивановичу. Сам же Пётр Иванович никогда не говорил, что он помог мне решить этот жизненно важный вопрос. Таких людей, которые сделав что – то доброе для человека и которые не только не хотят, чтобы человек благодарил их за это, но и не хотят даже того, чтобы человек знал об этом, весьма немного. Когда написал свою первую научную работу, то за отзывом обратился к Петру Ивановичу. Первый отзыв дал мне Пётр Иванович, а второй – Екатерина Фёдоровна Иванова. Пётр Иванович, написав докторскую диссертацию, прошёл предзащиту в Новосибирске, но на защиту ему поехать не пришлось. Приехав из Новосибирска, он заболел и умер. Смертным давно известно, что очень хорошие люди часто умирают в молодом возрасте, что рано Господь Бог отзывает их из этого мира.

В моей душе живёт глубокая благодарность моей первой учительнице Анне Максимовне Перфильевой , всем моим школьным учителям и всем моим университетским преподавателям , Царствие им Небесное и Вечная светлая память .

Кафедрой математического анализа в Иркутском пединституте заведовал Борис Альбертович Бельтюков. Он взял меня к себе на кафедру на должность ассистента. Борис Альбертович работал в области интегральных уравнений, у него была учёная степень доктора физико-математических наук, он очень много работал сам и от сотрудников кафедры требовал ответственного отношения к работе. Посещал занятия молодых преподавателей, иногда вместе с кем-нибудь из наиболее опытных преподавателей кафедры, затем эти занятия обсуждались, отмечались достоинства и недостатки. На кафедре проводились семинары, а в институте – научные конференции. Тезисы научных докладов, прослушанных на конференциях, печатались. Борис Альбертович был знаком с некоторыми ведущими математиками страны, общался с Николаем Сергеевичем Бахваловым и Сергеем Михайловичем Белоносовым, выступал с докладом на международном математическом конгрессе в Москве. Борис Альбертович взял меня к себе в аспирантуру, ввёл в мир интегральных уравнений, поставил предо мной научную проблему и, конечно, в моей душе хранится и глубокая благодарность ему и светлая память о нём.

Сергея Михайловича Белоносова хорошо знал. Познакомился с ним когда он приезжал в Иркутский пединститут и делал на кафедре математического анализа доклад. Сергей Михайлович был учеником Григория Михайловича Фихтенгольца, в сорок лет он стал доктором физико-математических наук и всю свою жизнь посвятил математике. В то время когда я учился и работал в Иркутске, Сергей Михайлович работал в Новосибирске. Затем он переехал в Киев и стал работать в Киевском университете. Во Львове живёт моя сестра с семьёй и когда ездил навещать родственников, в Киеве нужно было делать пересадку. Если позволяло время, навещал Сергея Михайловича. Сергей Михайлович, будучи очень загруженным работой, всегда находил возможность уделить мне внимание и они с Жанной Юрьевной всегда очень радушно меня принимали. Как и его учитель Григорий Михайлович Фихтенгольц, Сергей Михайлович очень много работал, работал едва – ли не до последнего дня своей жизни. За несколько дней до его смерти последний раз разговаривал с Сергеем Михайловичем по телефону, поздравлял его и его близких с Рождеством Христовым.

Своих родственников во Львове я обычно навещал во время февральских студенческих каникул , а лето они обычно проводили в Пятигорске . Муж сестры Богдан Иванович Гапа по профессии архитектор и когда сестра с мужем и тремя детьми приезжали в Пятигорск , то Богдан помогал на даче , дети тогда были ещё маленькими . Вместе с Богданом мы учились в школе и дружбу пронесли через всю жизнь . Богдан уже ушёл из этого мира , Царствие ему Небесное и Вечная светлая память .

9

Иркутский университет был основан Александром Васильевичем Колчаком. Хорошо известно, что Александр Васильевич Колчак был адмиралом, менее известно, что он был высоко образованным человеком. Сейчас в Иркутске ему поставлен памятник. Сразу после создания Иркутского университета в нём работал профессор Пашков Борис Климентьевич. Он был другом моего дедушки Николая Никандровича Игумнова. До революции Борис Климентьевич окончил восточный институт и в тридцать лет стал профессором. С нашей семьёй он поддерживал тесные отношения до самой своей смерти 1 сентября 1970 года. Последний раз был у него в мае 1970 года, приезжал к нему в Москву из Ставрополя, где работал ассистентом в Ставропольском филиале Краснодарского политехнического института. Когда уезжал, Борис Климентьевич проводил меня до лифта, мы простились и пока ожидали лифт, он довольно точно сказал мне моё будущее. Получив телеграмму о его смерти, прилетал на похороны. Борис Климентьевич никого не обременял, чуть ли не до самой смерти работал и когда пришло время уйти из этого мира, спокойно ушёл из него, завещая похоронить его по христиански на немецком кладбище рядом с могилой своей матери. В Иркутском университете он работал недолго, из

Иркутска уехал в Москву, работал там в академическом институте и занимался подготовкой аспирантов. Из Москвы во время отпуска прилетал к нам в Иркутск, а летом мы приезжали к нему в Москву. Когда мы были студентами поддерживал нас материально. И будучи студентом и после окончания университета, приезжая летом к Борису Климентьевичу в Москву , я посещал центральную библиотеку Советского Союза.

Борис Климентьевич – человек редкой доброты , очень много для меня сделавший , и для меня незабываем . Царствие ему Небесное и Вечная светлая память .

В советское время учёные были достаточно обеспеченными людьми. У Бориса Климентьевича была докторская степень, он был заслуженным деятелем науки Российской Федерации, учась в восточном институте, он специализировался по китайскому языку, включая и его умершие формы. До революции студенты восточного института лето проводили в стране изучаемого языка. В городе Бабушкине (сейчас это черта Москвы) у него была двухэтажная деревянная дача и в ней была его библиотека, которую он собирал в течении всей своей жизни. Затрудняюсь сказать на скольких языках были книги в его библиотеке. В то время, когда он решил построить дачу, в Москве и на окраинах Москвы невозможно было получить земельный участок под строительство. В городе Бабушкине он договорился с хозяйкой земельного участка, которая нуждалась в квартире, что он строит на её участке дачу, подводит к ней воду, газ, электричество и даёт ей в построенной даче квартиру с отдельным входом. У хозяйки участка был взрослый сын, которого лечили в психиатрической больнице. Её сына не считали опасным для окружающих больным и когда дача была построена и хозяйка участка вселилась в свою квартиру, ей иногда разрешали на день или два взять сына к себе. Борис Климентьевич стал жить на даче сам и предоставил возможность постоянно проживать на ней своему другу с женой. Все платежи за дачу, воду, газ, электричество он всегда делал сам. На его даче всегда было много людей, постоянно приезжали знакомые, родственники знакомых, жили аспиранты. Хозяйственными делами занималась родственница Бориса Климентьевича Анна Фаддеевна. Анна Фаддеевна была из деревни, хорошо была знакома с крестьянским трудом и очень рачительно вела всё хозяйство. На её плечах держался весь быт, она покупала продукты, готовила завтраки, обеды, ужины и содержала в порядке всю дачу. Когда Борис Климентьевич ушёл из этого мира , Анна Фаддеевна рассказала мне , что иногда рано утром она очень ясно слышит голос Бориса Климентьевича и отвечает ему : «Борис Климентьевич ! Да разве можно так пугать !» . Образ Анны Фаддеевны , глубокую благодарность ей , хранит моя память , Царствие ей Небесное и Вечная светлая память.

Борис Климентьевич был человеком редкой доброты. Приведу один случай из его жизни. Как – то вечером он зашёл на вокзал (сейчас точно не помню на какой, кажется, на Ярославский) и видит, что на бетонном полу лежат человек десять призывников. Он подходит к командиру и спрашивает: «Почему ребята лежат на бетонном полу?» Командир ответил, что завтра у них поезд, с которым они уезжают. Борис Климентьевич ему говорит: «Поедем ко мне, поужинаем, вы у меня переночуете и утром поедете на вокзал». И всех забрал к себе. Далее расскажу о том, что случилось с его дачей. Борис Климентьевич нам рассказывал, что как – то вечером, будучи на даче, он лежал на диване и читал «Вечернюю Москву», затем свернул газету и хотел положить её на столик, стоявший возле дивана и видит, что возле столика стоит его умерший отец. Решив, что отец пришёл за ним, что он должен умереть, он собрал все свои документы и положил их во внутренний карман своего пиджака, чтобы их после его смерти не нужно было искать. Перед сном он раздевался и одежду обычно весил на стул, который стоял рядом с диваном, на котором он спал. Спальня Бориса Климентьевича была на первом этаже. В связи с явлением Борису Климентьевичу его умершего отца, вспоминаю слова Владимира Семёновича Высоцкого: «Наши мёртвые нас не оставят в беде, наши павшие как часовые». Прошло непродолжительное время после этого видения и среди ночи в его спальню вбегают аспиранты, которые спали на втором этаже, с криками: «Пожар! Пожар!» Они выбивают окно и выбрасывают в окно одеяло, которым укрывался Борис Климентьевич. Борис Климентьевич хватает со стула пиджак, выпрыгивает в нижнем белье из окна и становится босыми ногами на одеяло, был февраль месяц. Все жильцы дачи успели выскочить. Один из аспирантов побежал к телефону – автомату. Вбегает в кабину и обнаруживает, что телефонная трубка обрезана. Когда приехали пожарники, вся дача уже была охвачена огнём. Пожарники, приступившие к тушению пожара, спрашивают у Бориса Климентьевича, есть ли у него золото. Он заплакал и сказал, что горит его библиотека, которую он собирал всю свою жизнь и что в этой горящей библиотеке есть книги, которых нет в библиотеках Москвы. После пожара Борису Климентьевичу дали квартиру с подселением. Это была двухкомнатная квартира, в одной комнате жил он, а во второй – рабочий метростроя с семьёй и только перед смертью ему дали отдельную однокомнатную квартиру.

К сказанному о явлении Борису Климентьевичу его умершего отца добавлю то, что сказала мне Юлия Анатольевна Андросова. С Юлией Анатольевной мы работали вместе на кафедре математики. Юлия Анатольевна очень хорошо ко мне относилась, когда я болел проводила за меня занятия. Когда она заболела раком, то несколько раз её навещал. Когда я посетил её последний раз, насколько помню, это был ноябрь 2002 года, то она в присутствии своей дочери Кати сказала мне, что ей сказали (не в этом мире), что 29 декабря будет решаться её судьба; сказали, что либо она выздоровеет, либо умрёт. Образ Юлии Анатольевны , её слова о конце своей жизни , которые точно сбылись , хранит моя память . Я глубоко благодарен Юлии Анатольевне за всё сделанное для меня, Царствие ей Небесное и Вечная светлая память . Перед новым годом мне нужно было поехать в Ростов. Когда первого или второго января, сейчас уже точно не помню, приехал из Ростова, то мне сказали, что Юлия Анатольевна умерла. Я был на её отпевании и на похоронах. Когда отмечалось сорок дней со дня её смерти, и Катя устроила поминальный обед, познакомился с Дмитрием Марковичем Заграевским.

10

Начиная рассказывать о даче Бориса Климентьевича, я говорил, что у хозяйки земельного участка был сын, которого лечили в психиатрической больнице и ей разрешали иногда забирать его домой. Однажды, взяв сына из больницы, она решила навестить сестру, которая жила в Москве, переночевать у неё, а на следующий день возвратиться домой. Оставшись один, её сын, встав среди ночи, одел на себя белую рубашку, новый костюм, поджог дачу и вышел на улицу. На протяжении всей истории человечества наряду с нормальными людьми были и сумасшедшие. Наличие сумасшедших говорит о том, что у человека есть не только тело, но и душа и наличие сумасшедших очень наглядно показывает, что происходит с человеком, если повреждено не его тело, а душа. Само слово душевнобольной не имеет смысла, если у человека нет души. Согласно христианскому миросозерцанию и другим мировым мистическим религиям душа может как пребывать в человеческом теле, так и существовать вне тела. Веками шли дебаты о том может или нет человеческая душа существовать вне человеческого тела. Этот вопрос не праздный. От того как отвечает человек на этот вопрос – да или нет зависят его поступки, его поведение, его отношение к людям, его жизненная позиция, его жизнь. Приведу ответ на этот вопрос Петра Калиновского – врача из Австралии: «Новые методы реанимации, то есть возрождения к жизни недавно умерших людей, позволили учёным – медикам приоткрыть завесу над тайной смерти и увидеть немного больше, чем было возможно до сих пор. Оказалось, что смерть тела ещё не конец существования личности. Какая – то часть человека – назовите её, как хотите, «личность», «сознание», «Я», «душа», дело не в названии, - покидает умершее тело и продолжает жить в новых условиях. Исследователи были поражены полученными результатами и сперва встретили их с недоумением, почти с недоверием. Но новые данные были не плодами фантазии, а неоспоримыми фактами, добытыми наукой.

Христианскому учению можно было верить или не верить, христианский образ жизни принять или отбросить и жить, как будет удобнее. С фактами так поступить не удастся. От них можно отворачиваться, но они останутся, и через некоторое время новое знание неизбежно станет достоянием всех.

Изменит ли это что-нибудь? Каждое большое открытие в чём-то меняло образ жизни людей. Использование силы пара, электричества, энергии атома сделало жизнь удобнее, комфортабельнее. Это были крупные открытия в материальной сфере, а теперь сделано новое и большое открытие в сфере жизни духовной. Произошло это как раз в то время, когда всё духовное было уничтожено, осмеяно и почти забыто, а неверие стало обычным и привычным.

Но вот становится очевидным, что смерть – это не конец существования личности. Моя жизнь на Земле – это только часть всей моей жизни, только начало развития моих свойств и меня самого.

Для широких масс современных людей эти открытия настолько неожиданны и огромны, что для понимания и усвоения их значения потребуется время. Вероятно должны смениться два или три поколения. Но новое знание уже с нами, и оно обязательно охватит весь мир. На смену мёртвому материализму идёт новое, более полное и светлое понимание мира и судьбы каждого человека».

Приведу заслуживающие внимания слова преподобного Ефрема Сирина (Ефрем Сирин – христианский богослов, родившийся около 306 года , Римская империя): « Если был тружеником, то не скорби о приближении этого доброго переселения, потому что не печалится возвращающийся домой с богатством» .

В четвёртой главе приведены глубокие размышления Фёдора Михайловича Достоевского о смерти. Наша современница Тамара Ивановна Орнатская - доктор филологических наук и ведущий научный сотрудник ИРЛИ РАН, так комментирует размышления Ф.М.Достоевского о смерти: «М.Д.Достоевская умерла не 16, 15 апреля. На следующий день в записной книжке Достоевского появились записи, связанные с её смертью. Они представляют собою глубокие раздумья, переросшие в философские размышления о личном бессмертии, о противоборстве в душе человеческой эгоизма и самопожертвования, о возможности будущей мировой гармонии, о непрерывной связи человека с теми, кто жил до него и кто придёт ему на смену».

Фёдор Михайлович Достоевский убедительно показывает, что достойная человеческая жизнь невозможна без веры в Бога и веры в бессмертие человеческой души: «Совесть без Бога есть ужас, она может заблудиться до самого безнравственного…

Представьте себе, что нет Бога и бессмертия души… Скажите, для чего мне тогда жить хорошо, делать добро, если я умру на земле совсем? Без бессмертия – то ведь всё дело в том, чтоб только достигнуть мой срок, а там хоть всё гори. А если так, то почему мне и не зарезать другого, не ограбить, не своровать, или почему мне, если уж не резать, так прямо жить на счёт других, в одну свою утробу? Ведь я умру, и все умрём, ничего не будет… Вся жизнь человека, личная и общественная, стоит на вере в бессмертие души. Это наивысшая идея, без которой ни человек, ни народ не могут существовать». Часто можно слышать, что жизнь – это борьба. Не отрицал этого и Фёдор Михайлович и, выражая глубинную суть человеческой жизни, говорил, что сатана борется с Богом, поле же борьбы – сердца человеческие. В книге Сент-Экзюпери «Маленький принц» есть глубокие слова, которые уместно упомянуть, говоря о наличии у человека души: «Самое главное для глаз невидимо».

В давние времена сумасшедших называли бесноватыми и считали, что в них вселился бес или много бесов, которых апостол Павел называет «духами злобы поднебесной». В советское время такая точка зрения считалась средневековым мракобесием. То что бесы могут вселяться в человека большинство советских людей считало не иначе как средневековым мракобесием, а многие так думают и сегодня. Но и сегодня о сумасшествии, о душевных болезнях мы знаем очень мало и очень хорошо знаем как плохо они лечатся. Если человек смотрит на людей как на бессмертных духов, а на человеческое тело как на храм души, то возможность заселения человеческого тела падшими духами не будет казаться ему средневековым мракобесием. В «Новом Завете» приводятся описания изгнаний бесов Христом. Описание изгнания бесов из одержимого ими, приведённое в «Новом Завете», Фёдор Михайлович Достоевский взял эпиграфом к своему пророческому роману «Бесы», в котором он, около 130 лет назад предсказал всё, что произойдёт с Россией. По – видимому, за этот роман Ленин назвал Фёдора Михайловича «архискверным». Характеризуя деятельность Ленина, Иван Алексеевич Бунин пишет, что мир сошёл с ума. И это не пустые слова, поскольку сознание очень многих людей слишком далеко отошло от великих нравственных законов и истинных ценностей. Двадцатый век явил миру умопомрачение целых народов. Сегодня многое изменилось. Не говоря уже о марксистско-ленинском мировоззрении, которым загружалось сознание всех советских людей, сегодня уже просто материалистическое мировоззрение не является безраздельно господствующим. Изменения в сознании произошли. Вспомним хотя бы недавно шедший фильм «Остров», который смотрели многие россияне и не воспринимали как средневековое мракобесие. В этом фильме рассказывается о том, как старый монах, стоящий уже у гробовой доски, изгоняет беса из сумасшедшей девушки.

11

В августе 1969 года, будучи в Москве у Бориса Климентьевича, сказал ему, что меня привлекает юг и, что хотел бы иметь на юге работу и квартиру. Борис Климентьевич сказал мне, что может помочь мне устроиться на работу в Элистинском университете, где работают его ученики. Он написал рекомендательное письмо и, взяв билет на самолёт, я полетел в Элисту. В университете меня очень хорошо приняли, но Элиста не произвела на меня большого впечатления и сказал, что мне нужно ещё подумать и добавил, что поскольку от Элисты недалеко до Ставрополя, хочу поехать в Ставрополь, посмотрю город и из Ставрополя поеду в Москву. Меня проводили и дали на дорогу два замечательных арбуза. Приехав в Ставрополь, зашёл в Ставропольский филиал Краснодарского политехнического института. Филиал возглавлял Василий Васильевич Назаренко. Василий Васильевич принял меня очень доброжелательно. Он попросил к себе старшего преподавателя кафедры математики Станислава Алексеевича Мартынова и втроём мы беседовали. Василий Васильевич спросил какое у меня образование, сколько лет работаю в высшей школе, а Станислав Алексеевич попросил рассказать на каких курсах работал в Иркутском педагогическом институте и какие разделы математики вёл. Беседа закончилась словами Василия Васильевича: «Подавайте документы на конкурс». Подал документы на конкурс и 25 декабря 1969 года пришло сообщение из Краснодарского политехнического института, что прошёл по конкурсу. Семнадцатого января 1970 года приехал в Ставрополь, а девятнадцатого января вышел на работу. В

Ставрополе остановился у знакомых Бориса Климентьевича Фадеевых. Валерий Петрович и Эльза Григорьевна – добрые сердечные люди, предоставили мне комнату, которая была детской, у них было двое детей. Попросил Валерия Петровича и Эльзу Григорьевну приютить меня пока не найду квартиру и занялся поисками квартиры. Искал квартиру в частном секторе и одновременно знакомился со Ставрополем. Наступил уже февраль, а поиски квартиры были пока безрезультатными. В Ставрополе лежал снег, была отрицательная температура и, занимаясь поисками квартиры, увидел детей, катающихся с горки на санках. Подошёл к ним и спросил не знают ли они кто здесь сдаёт квартиру. Одна девочка лет пяти говорит мне: «Пойдёмте к моей бабушке и спросим у неё». Спросил: «Как зовут тебя и твою бабушку?» Она мне ответила: «Меня зовут Людочка Зверховская, а мою бабушку зовут Нина Кирилловна». И мы вместе с Людочкой пошли к Нине Кирилловне. Нина Кирилловна была на пенсии. До выхода на пенсию она жила на Украине и работала в колхозе, пенсия у неё была двенадцать рублей. Нине Кирилловне сказал, что работаю в политехническом институте ассистентом и нуждаюсь в квартире. Она согласилась меня взять, мы договорились об оплате и договорились, что она меня пропишет. Зарплата у меня не была высокой, но не двенадцать рублей, а почти в десять раз больше. После родного дома дом Нины Кирилловны стал для меня вторым домом. У Нины Кирилловны был сын и замужняя дочь, у которой было двое детей Юра и Люда. Дочь Нины Кирилловны Анна Терентьевна была врачом и жила с семьёй в своей квартире, а её сын Пётр Терентьевич жил с матерью, днём он был на работе. У меня были замечательные и жилищные условия и условия для занятий. Нина Кирилловна относилась ко мне как к члену семьи. Когда приходил с работы мы вместе ужинали и за чаем подолгу разговаривали. Нина Кирилловна мне много рассказывала о своей жизни и о работе в колхозе, о километровых рядках сахарной свёклы, прополкой которой она занималась, много рассказывала и о голоде на Украине, который был в начале тридцатых годов. О голоде на Украине и юге России знал и раньше, но в общих чертах, без страшных подробностей, а Нина Кирилловна, сама пережившая этот голод, рассказывала мне именно эти страшные подробности. Рассказывала, что на работу она обычно ходила вместе со своей соседкой Дашей, заходила к Даше и затем вместе они шли на колхозное поле. У Даши была дочь Таня, девочка лет двенадцати, и когда Нина Кирилловна однажды утром зашла в Дашины сени, то увидела Таню, лежащую на полу и накрытую мешком, из-под которого торчали её ножки. Отворив дверь в Дашину хату, она увидела Дашу почерневшую от горя и голода, и спросила пойдёт ли она на работу. Даша ответила, что пойдёт. Нина Кирилловна спросила её: «А как же Танечка?» Даша ей ответила: «А что Танечка, Семён приедет и заберёт». Нина Кирилловна мне пояснила, что люди находились в состоянии такой страшной апатии и таком страшном упадке сил, что даже не хоронили умерших и колхозная администрация вменила в обязанность колхознику Семёну собирать покойников и хоронить. Продолжая далее, она сказала, что в результате этого страшного голода часть их села вымерла и добавила, что были и такие сёла, которые вымирали полностью. Те, кто не поверит сказанному Ниной Кирилловной, пусть прочитают небольшую повесть Василия Гросмана "Всё течёт" (журнал "Октябрь", 1989 год, n. 6) .

Образ Нины Кирилловны, которая относилась ко мне как к члену своей семьи, глубокую благодарность ей, хранит моя память, Царствие ей Небесное и Вечная светлая память.

Англо-американский историк Роберт Конквест, написавший в 1968 году своё художественно-документальное исследование «Большой Террор», перед публикацией этого произведения в журнале «Нева», в начале перестройки приехал в редакцию журнала и дал интервью. С ним беседовали Крыщук и Лурье и задали ему вопрос: «Мистер Конквест, чем Вы объясняете столь массовое ослепление? Ведь сопротивления сталинскому режиму практически не было». Роберт Конквест ответил: «Недавно я прочитал в одной советской книге о коллективизации: если бы крестьяне знали, что это происходит повсюду, - они бы восстали. Но они не знали и не могли знать. Сталин осуществлял жёсткий контроль информации. Это относится и к городам». В своём интервью он сказал: «Ко времени написания книги многое уже изменилось и у вас. В частности, все мы знали содержание секретного доклада Хрущёва. Думаю, что больше половины источников, которыми я пользовался, советские. Но советский историк не мог провести подобное исследование в связи с тем, что существовал запрет на факты. Только иностранец способен был выполнить эту работу и остаться в живых». Роберт Конквест говорит, что в Советском Союзе был запрет на факты. Действительно, в пятидесятые, шестидесятые и семидесятые годы в библиотеках нельзя было взять довоенную газету, из библиотек были изъяты многие книги, изданные в двадцатые и тридцатые годы. В «Малой Советской Энциклопедии», которая была изъята из библиотек вскоре после её издания, о Зиновьеве написано: «Зиновьев (Радомысльский) Григорий Евсеевич (р. 1883), старый большевик. В РСДРП с 1901… После Февральской революции приезжает в Россию. В июльские дни вынужден уйти в подполье, скрываясь вместе с Лениным в шалаше на ст. Разлив» (см. Малая Советская Энциклопедия, т. 3, М., 1931). Только в этом издании Советской Энциклопедии написано, что Ленин не один жил в шалаше. Во всех более поздних печатных изданиях писалось, что Ленин в шалаше жил один. Коллективизации предшествовала продразвёрстка. Сопротивление продразвёрстке было. В Малой Советской Энциклопедии можно прочитать о крестьянском восстании под руководством Антонова, которое охватило ряд губерний центральной России (см. слово «Антоновщина»). В этой энциклопедии написано, что к 1921 году армия Антонова насчитывала 50 тысяч человек.

Георгий Петрович Федотов, говоря о капитале в 150 миллионов восточной покорности, которым располагал Сталин, о коллективизации пишет так: «Сталин понял (в этом и только в этом логика с ним), что крестьянство медленно разлагает, рассасывает, обессиливает партию; что это единственная сила национальной России, перед которой остановился коммунизм. Неважно какими путями он пришёл к этой бесспорной истине. Завещанная ему программа троцкистов, сопротивление со стороны деревни индустриальной пятилетке, трудности выколачивания хлеба у крестьян – шаг за шагом привели его к новой грандиозной задаче. Задача эта совсем просто формулируется так: уничтожить около 100 миллионов русского крестьянства, заменив его или уцелевший от голодной смерти его остаток земельным пролетариатом государственных «хлебных фабрик». Никогда ещё столь дерзкая мысль не воплощалась в волю государственного деятеля. Hic inciptdementia. Но, может быть, никогда ещё ни один правитель не наследовал такой сверхчеловеческой власти. Как вождь революции, Сталин возглавляет дьявольскую энергию фантастического и фанатического меньшинства, овладевшего силами великого народа» (см. Г. П. Федотов. Судьба и грехи России. М. 2005 г.).

Философ Иван Александрович Ильин (1883 – 1954), покинувший родину в 1922 году, считает, что проведённая в Советской России коллективизация была возвратом страны к крепостному праву и пишет об этом так: «Вслед за тем (1929 – 1935) коммунисты приступили к коллективизации и, погубив казнями и ссылками не менее 600 000 дворов и семей, ограбили и пролетаризировали крестьян и ввели государственное крепостное право» (см. И.А.Ильин. Возвращение. Минск. 2008 г.).

В 1965 году отмечалось 70 лет со дня рождения Сергея Есенина и 40 лет со дня его насильственной смерти. О том, что смерть была насильственной тогда, конечно, не упоминалось. Во всех советских энциклопедиях и энциклопедических словарях написано, что Сергей Есенин покончил жизнь самоубийством. Лишь когда в стране была допущена гласность, телевидение подробно рассказало о его насильственной смерти. В колонном зале Дома Союзов на встрече с общественностью Москвы, задолго до того как в стране была допущена гласность, Евгений Евтушенко прочитал своё стихотворение «Письмо к Есенину», где есть такие строки:

Какие стройки, спутники в стране!

Но потеряли мы в пути неровном

И двадцать миллионов на войне,

И миллионы на войне с народом.

В институте у меня установились наиболее тесные дружеские отношения с Виктором Фёдоровичем Кондратьевым и Мартуни Александровичем Арутюняном. Виктор Фёдорович работал на кафедре теоретической механики, а Мартуни Александрович – на кафедре физики, оба они имели учёные степени. Они были близки мне прежде всего по духу, по своему мировоззрению, по врождённому благородству. У Мартуни Александровича была квартира, в которой он жил со своей семьёй, а Виктор Фёдорович снимал квартиру, которая мало его устраивала. Вместе с Виктором Фёдоровичем мы пошли к Нине Кирилловне и она его тоже взяла в свой дом. Наши вечерние чаепития продолжились и мы с интересом и удовольствием слушали рассказы Нины Кирилловны о прожитой жизни. Она нам рассказывала о своей жизни в колхозе, о рядовых тружениках, о колхозной администрации, о председателе колхоза (фамилия у него была Гопчак), о том как он строил себе дом, о его жене, которая вместе со всеми колхозницами работала от рассвета до темна. Рассказывала она нам, конечно, и о Великой Отечественной войне, обо всём, что ей пришлось пережить. Вместе с Виктором Фёдоровичем мы прожили у Нины Кирилловны примерно год и институт дал Виктору Фёдоровичу квартиру.

12

Когда Виктор Фёдорович вселился в квартиру и к нему приехала его семья, он всё своё свободное от занятий время стал тратить на написание научных статей, которые публиковал в центральных научных журналах. Получив квартиру, он сказал мне, что хочет прописать меня в своей квартире. Выразив ему сердечную благодарность, сказал, что собираюсь пойти к заведующей кафедрой и поговорить с ней об общежитии. Кафедрой высшей математики заведовала Вера Ивановна Меньшикова, она была профессором, докторскую диссертацию защищала по приложениям математики. Она посещала мои занятия и очень хорошо ко мне относилась. Когда сказал ей об общежитии, она, оставив свои дела, пошла к ректору. На моих глазах происходило превращение Ставропольского филиала Краснодарского политехнического института в Ставропольский политехнический институт и в том, что филиал стал самостоятельным институтом, большая заслуга Василия Васильевича Назаренко. Когда филиал стал Ставропольским политехническим институтом, ректором был назначен Юрий Яковлевич Дмитриев. Вера Ивановна, возвратившись от ректора, сказала мне: «Ректор дал вам комнату в общежитии». С Юрием Яковлевичем мало соприкасался когда он был ректором. Глубже узнал его, когда он перестал быть ректором. Это был человек высокой культуры, с врождённым благородством, понимавший значимость человеческой личности и умевший ценить людей. Когда он уехал из Ставрополя переписывался с ним до тех пор пока он не ушёл из этого мира. Юрий Яковлевич был одним из тех замечательных людей, встретившихся на моём жизненном пути, которые не забываются , Царствие ему Небесное и Вечная светлая память. Наверное не ошибусь, если скажу, что в своих отношениях с людьми Юрий Яковлевич руководствовался заповедью Христа: **«Итак во всём, как хотите, чтобы с вами поступали люди, так поступайте и вы с ними» (Евангелие от Матфея, гл.7, ст. 12).** В самом начале этого биографического очерка упоминал, что будучи студентом, внимательно прочитал четыре Евангелия от Матфея, Марка, Луки и Иоанна, в которых излагается учение Христа. Читая Евангелие, конечно, обратил внимание на эту заповедь. Если бы она исполнялась, то одна она изменила бы весь мир. С этой заповедью по глубине и значимости не могут сравниться сотни томов юридической литературы.

Работая в Ставропольском политехническом институте, знал многих математиков из педагогического института, хорошо знал Андрея Андреевича Привалова. К Андрею Андреевичу ходил на семинар, который он вёл для преподавателей педагогического института. Педагогический институт публиковал научные работы преподавателей математики в научных сборниках института. Вместе с членом реакционной коллегии Станиславом Серафимовичем Хлопониным мы пошли к Марии Фёдоровне Куликовой. На моём жизненном пути встречалось много замечательных бескорыстных и очень добрых людей. Мария Фёдоровна была одна из них, она любезно согласилась помочь мне в публикации моих работ. Мария Фёдоровна была доцентом и заведовала кафедрой. Одна из её статей была опубликована в ДАН. Чтобы опубликовать статью в Докладах Академии Наук СССР, к публикации она должна была быть представленной каким-нибудь академиком. Когда стажировался в Московском университете, мне рассказывали, что один студент мехмата опубликовал свою работу в ДАН. Вскоре после публикации своей статьи, он получает письмо из США, которое начиналось с обращения: «Господин профессор!»

Посещая семинар Андрея Андреевича Привалова, весьма близко познакомился с Андреем Андреевичем, Станиславом Серафимовичем и другими участниками семинара. И Андрей Андреевич и Станислав Серафимович приглашали меня к себе. Станислав Серафимович был скромным и очень добрым человеком. Когда приходил к нему мы садились за его обеденный стол, его радушие помню и сейчас. Станислав Серафимович занимался теорией цепных дробей и свои силы отдавал работе над докторской диссертацией, но защитить её ему не пришлось. Судьба его похожа на судьбы многих выдающихся людей, он очень рано был отозван из этого мира. Я очень благодарен Станиславу Серафимовичу за его помощь и поддержку, Царствие ему Небесное и Вечная светлая память. Андрей Андреевич Привалов в свои молодые годы был лётчиком, затем, получив математическое образование, вначале защитил кандидатскую диссертацию, а потом докторскую. Он был племянником известного советского математика Ивана Ивановича Привалова. Мои контакты с Андреем Андреевичем не прекращались и после того как из Ставрополя он уехал в Саратов и стал работать в Саратовском университете в должности профессора. У студентов ВУЗов в советское время в феврале были студенческие каникулы, в это же время студенческие каникулы и сейчас. Во время этих каникул работала Саратовская зимняя математическая школа. Участие в работе школы открывало возможность послушать доклады ведущих математиков страны и самому выступить с докладом. Материалы работы зимней школы публиковались. Андрей Андреевич всегда присылал мне приглашения принять участие в работе зимней школы, всегда с Юлией Николаевной, его женой, приглашали к себе, всегда замечательно радушно принимали. Андрей Андреевич был замечательным, очень интересным собеседником, он был из дворян и говорил, что его род своими корнями уходит в «Приваловские миллионы». Андрей Андреевич и его жена Юлия Николаевна были высокоинтеллигентными , очень доброжелательными людьми , людьми широкой русской души , во время работы Саратовской зимней школы всегда приглашали меня к себе в гости , Царствие им Небесное и Вечная светлая память.

В начале 1973 года стало известно, что факультет общественного питания Ставропольского политехнического института будет переводиться в Пятигорск и, что деканом факультета назначается Василий Васильевич Назаренко. Василий Васильевич сам выбирал преподавателей из числа желающих поехать работать в Пятигорск. Начав работать в Ставропольском филиале Краснодарского политехнического института, я был поставлен в очередь на квартиру, очередь была большая и было неизвестно, когда она подойдёт. Уже писал, что Василий Васильевич принимал меня на работу и хочу сказать о нём несколько слов. Его юные годы прошли в тяжёлом крестьянском труде. Строгое воспитание и, выработанная им, привычка упорно трудиться помогли ему получить высшее образование и учёную степень. Он был участником сражений на полях Великой Отечественной войны, был тяжело ранен, а затем контужен. За время войны два раза лежал в госпитале, после ранения и после контузии, видел много людского горя, видел много человеческих страданий. Ко мне он относился с исключительной доброжелательностью. За всё сделанное для меня Василием Васильевичем, я ему очень благодарен , Царстие ему Небесное и Вечная светлая память . Он взял меня в Пятигорск и заверил, что в Пятигорске мне дадут квартиру и в августе 1973 года, я вместе с другими преподавателями приехал в Пятигорск. Главой города Пятигорска был тогда Виктор Алексеевич Казначеев. Виктор Алексеевич, будучи высокопоставленным должностным лицом, нашёл возможным принять в своём кабинете приехавших из Ставрополя преподавателей и побеседовал с каждым из приехавших. Меня он спросил какой ВУЗ окончил и сколько лет работаю в высшей школе. Для меня незабываема эта беседа , незабываемо всё, что сделал для меня Виктор Алексеевич , Царствие ему Небесное и Вечная светлая память . Примерно в течении года он решил квартирный вопрос преподавателей и тем самым заложил фундамент будущего Пятигорского технологического университета. В те уже далёкие советские времена, когда и специалистам и рабочим квартиры давали, очередь на квартиру, обычно, длилась лет пять и больше и такое решение квартирного вопроса было необычным. Для Сравнения скажу как решался квартирный вопрос Якова Васильевича Быкова. Яков Васильевич – доктор физико-математических наук, он создал в Киргизии школу по интегро-дифференциальным уравнениям, включён в библиографический словарь деятелей в области математики, в который включены выдающиеся математики, начиная с Архимеда и Пифагора. Непродолжительное время он работал в Черкесском филиале Ставропольского политехнического института, а затем уехал в Киргизию в Бишкек (Фрунзе) и стал заведовать кафедрой дифференциальных уравнений в Киргизском государственном университете. Поселили его в студенческом общежитии и только незадолго перед смертью дали однокомнатную квартиру. Расскажу как случилось мне у него побывать. В 1982 году в Киргизском университете проходила конференция по интегро-дифференциальным уравнениям и Яков Васильевич пригласил меня на неё. Участников конференции разместили в студенческом общежитии рядом с которым была студенческая столовая, в которой, насколько помню, бесплатно и замечательно кормили. Когда закончились выступления участников конференции, Яков Васильевич пригласил несколько хорошо знакомых ему математиков и меня к себе в гости, в только что полученную однокомнатную квартиру и очень радушно нас принимал. Затем была экскурсия на озеро Иссык-Куль. Благодаря приглашению Якова Васильевича мне удалось единственный раз в жизни побывать в Киргизии , которая произвела на меня очень хорошее впечатление .

Общение с Яковом Васильевичем Быковым и его помощь мне, много значили для меня. Образ Якова Васильевича и глубокую благодарность Якову Васильевичу хранит моя память, Царствие ему Небесное и Вечная светлая память.

Я получал много приглашений на математические конференции и благодаря этих приглашений посетил много городов нашей страны. Очень значимой для меня была конференция, проходившая в городе Майкопе в 1972 году. Председательствовал на конференции профессор Вайнберг Мордухай Моисеевич – математик, известный и в нашей стране и за её пределами. Мордухай Моисеевич дал положительную оценку моему докладу, сказав, что задача, которой я занимаюсь является актуальной и посоветовал продолжать работу в этом направлении. Материалы конференции печатались в Ростове, а ответственным редактором был профессор Мамий Казбек

Сагидович . Был установлен жёсткий срок сдачи докладов ответственному редактору. Я бы опоздал со сдачей моего доклада, если бы не поехал к Казбеку Сагидовичу в Майкоп. Казбек Сагидович принял меня у себя дома и познакомил со своей женой Любовью Гороновной и своим пятилетним сыном Даудом. То радушие, с которым я был принят в доме Казбека Сагидовича, не забыто мною и сегодня. Я помню мою беседу с Даудом. Дауд мне сказал , что он очень любит кататься на санках и ждёт , когда выпадет снег.

Мало что так впечатляет и покоряет человеческую душу, как искренняя доброжелательность людей. Уже упоминал, что в Пятигорске на факультете общественного питания мы работали вместе со Стеллой Васильевной Юриной, она работала на кафедре химии в должности доцента. Муж Стеллы Васильевны - Геннадий Анисимович Бусенко возглавлял вначале факультет общественного питания, а затем филиал Ставропольского политехнического института в городе Пятигорске. В конце июня 1974 года, когда закончились занятия и экзамены, я собирался провести летний отпуск в Иркутске. Стелла Васильевна сказала мне, чтобы не уезжал, потому что в июле или августе будут давать квартиры. Когда получил квартиру, в ней были голые стены. Стелла Васильевна и Геннадий Анисимович приехали ко мне на грузовой машине и привезли свой шифанер и матрас. Всё то, что сделали для меня Стелла Васильевна и Геннадий Анисимович, незабываемо.

Говоря о замечательных, ярких личностях, встретившихся на моём жизненном пути, скажу несколько слов в память о Николае Ивановиче Черневе. Николай Иванович был редактором газеты «Кавказская Здравница», относился ко мне с исключительной доброжелательностью и я обращался к нему за помощью и советами. В моей памяти хранятся наши прогулки по Пятигорску и его рассказы о нашей советской действительности. Далее приведу один из его рассказов, сохранившихся в моей памяти. При Леониде Ильиче Брежневе Николай Иванович был в Москве на совещании редакторов газет. Выступавший перед собравшимися лектор распекал какого – то антисоветчика, разбирая то, что вышло из под его пера. Лектора Николай Иванович давно знал, находился с ним в дружеских отношениях и когда доклад был закончен, подошёл к нему и сказал: «Ты дай мне почитать всю эту стряпню». Тот ответил: «В глаза не видел».

Стелла Васильевна, Геннадий Анисимович и Николай Иванович уже ушли из этого мира. Светлая память о них и глубокая благодарность им живут в моей душе. Царствие им Небесное и вечная светлая память.

Непосредственным распределением квартир занимался Матвей Николаевич Каюдин и он дал мне квартиру не только недалеко от места работы, но и распорядился сделать в ней ремонт. За всё сделанное для меня, глубоко благодарен Матвею Николаевичу, Царствие ему Небесное и Вечная светлая память. Когда получил квартиру, из Иркутска приехала мама и все хозяйственные заботы взяла на себя. У меня отпала необходимость покупать продукты, что – то готовить, мыть посуду, стирать и гладить. На всё это требовалось много времени и теперь это время можно было потратить на завершение работы над диссертацией. Рукопись диссертации у меня была уже написана и её нужно было на пишущей машинке отпечатать в нескольких экземплярах и во все экземпляры вписать формулы. Поручать печатать математический текст машинистке было бесполезно, поэтому всю эту работу нужно было проделать самому. Моё время уходило на то, чтобы вести занятия в институте, заниматься оформлением диссертации и посещать семинар. Моё расписание занятий было составлено так, что у меня была возможность ездить в Черкесск и посещать научный семинар Якова Васильевича Быкова. Когда отпечатал текст диссертации на пишущей машинке и в текст вписал формулы, попросил Якова Васильевича посмотреть мою работу. Ознакомившись с работой, Яков Васильевич сказал, что, по – видимому, единственным в Советском Союзе математиком, занимающимся рядами Ли и их приложениями, является член – корреспондент Узбекской АН Александр Николаевич Филатов и посоветовал мне позвонить ему. Его телефона Яков Васильевич не знал, знал лишь, что он работает в Ташкенте. И здесь, по – видимому, мне пришёл на помощь мой умерший отец. Когда наша семья переехала жить в Иркутск, отец стал заведовать кабинетом математики в Иркутском институте усовершенствования учителей. Это была не совсем рядовая должность и такие должности в советское время обычно занимали члены партии, а отец был беспартийным. Ему неоднократно предлагали вступить в партию, но он всякий раз говорил, что не считает себя подготовленным. Раз в год, а может быть реже, сейчас уже точно не помню, заведующих кабинетами математики из разных городов страны собирали на совещание в Москве. На одном из таких совещаний мой отец познакомился с Саттаром Даньяровичем Гафуровым. Саттар Даньярович заведовал кабинетом математики в Ташкентском институте усовершенствования учителей. Они встречались на совещаниях и их знакомство переросло в дружбу. Саттар Даньярович бывал у нас в гостях в Иркутске, ему нравился город, уникальная Ангара, середина которой зимой не замерзает и вода в ней зимой настолько чистая, что с Ангарского моста просматривается всё дно. Очень понравились ему городская баня с её парной и берёзовые веники, которые он, по – видимому, видел впервые в жизни. Мы подолгу просиживали за обеденным столом, слушая интересные рассказы Саттара Даньяровича о Средней Азии и Ташкенте. К нему и обратился с просьбой сообщить мне телефон Александра Николаевича Филатова. Когда Саттар Даньярович сообщил мне телефон, то, позвонив Александру Николаевичу сказал, что написал диссертацию по рядам Ли и для меня очень важно было бы знать ваше мнение о моей работе. Александр Николаевич пригласил меня в Ташкент доложить работу на его семинаре.

14

В начале октября 1975 года взял билет на самолёт до Ташкента и дал телеграмму Саттару Даньяровичу. Самолёт в Ташкент прилетел вечером, осень совсем не чувствовалась в этом южном городе. Саттар Даньярович встретил меня на своей машине и мы поехали к нему домой. Проехав центральную часть города, застроенную прекрасными многоэтажными зданиями, мы стали продолжать путь по старому Ташкенту, где окна частных домов не выходят в сторону улицы, и я впервые в жизни увидел Мусульманский Восток. В доме Саттара Даньяровича принимали меня очень радушно, оценил узбекскую кухню, заслуживает она, конечно, высокой оценки. Утром поехал в институт математики и кибернетики. Встретил меня Александр Николаевич приветливо и очень доброжелательно и не только дал положительный отзыв о моей диссертации, но и познакомил меня с академиком Бондаренко Борисом Анисимовичем. Позднее Александр Николаевич и Борис Анисимович в своей, совместно написанной монографии «Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости», изданной в Ташкенте в 1978 году, сослались на одну из моих работ. Позднее, переехав из Ташкента в Москву, Александр Николаевич написал мне письмо и сообщил свой адрес и телефон. Когда прошли уже годы после защиты и я был в Москве, Александр Николаевич пригласил меня к себе, познакомил со своей семьёй и мы сели за приготовленный гостеприимный стол. С Александром Николаевичем поддерживал связь до самого его ухода из этого мира 14 августа 2006 года. Мы переписывались и разговаривали по телефону. На похороны Александра Николаевича приехать не успел, приехал когда его уже похоронили. С его женой Еленой Павловной мы посетили его могилу. В лице Александра Николаевича встретил замечательного доброжелательного человека, замечательного учёного, известного и в нашей стране и за её пределами, сыгравшего большую роль в моей жизни. Глубокая благодарность ему и светлая память о нём, конечно, живут в моей душе.

Чтобы определиться с местом защиты диссертации, нужно было во время учебного процесса на какое – то время, пусть даже на весьма непродолжительное, уезжать из Пятигорска по вопросам диссертации, а это было бы невозможно без поддержки заведующего кафедрой и коллег по работе. Когда стал работать в Пятигорске на кафедре физико-математических дисциплин, кафедрой заведовал Юрий Александрович Миронченко. Когда же он, сменяв свою квартиру на квартиру в Подмосковье, уехал из Пятигорска, кафедрой стал заведовать Виктор Григорьевич Руденко. И Юрий Александрович и Виктор Григорьевич относились ко мне очень доброжелательно. Ни от Юрия Александровича, ни от Виктора Григорьевича никогда не слышал отказа в моих просьбах о поездках, связанных с диссертацией, с научными конференциями, с Саратовской зимней математической школой.

В Московском педагогическом институте работал Василий Александрович Любецкий. Василий Александрович начинал учиться в Иркутском университете, затем перевёлся в Московский университет и, окончив мехмат МГУ, стал работать в Московском педагогическом институте. К нему обратился с просьбой помочь мне поставить на защиту мою диссертацию в Московском пединституте. Василий Александрович ответил на моё письмо и попросил прислать ему экземпляр моей диссертации. Диссертация у меня не была ещё переплетена и, купив папку для бумаг, положил в неё диссертацию и отправил. Прошло сколько-то месяцев, сейчас уже не помню сколько, и от Василия Александровича получаю письмо, в котором он просит меня приехать в Москву. Когда приехал в Москву и встретился с Василием Александровичем, он протянул мне мою папку с диссертацией. На папке рукой Евгения Алексеевича Щеголькова было написано: «Геннадию Андреевичу Шадрину. Ваше заключение?» Василий Александрович мне сказал, что заведующий кафедрой математической физики Геннадий Андреевич Шадрин дал положительное заключение о моей работе и теперь для того, чтобы поставить диссертацию на защиту, осталось получить только согласие проректора по научной работе. Проректор по научной работе, приняв меня в своём кабинете, сказал, что мы не можем своим соискателям, стоящим в очереди на защиту, отказать, а вас поставить на их место. Несмотря на отрицательное решение вопроса о защите, поездка в Москву оказалась для меня очень важной, Василий Александрович познакомил меня с Геннадием Андреевичем Шадриным. Уже во время первой беседы с Геннадием Андреевичем понял, что разговариваю с высоким профессионалом математиком, человеком большой русской души и близким мне по духу человеком.

Приехав из Москвы, стал вести занятия и некоторое время никаких попыток определиться с местом защиты диссертации не предпринимал. Затем поехал в Ростов и в Ростовском университете обратился к Виктору Иосифовичу Юдовичу. Виктор Иосифович мне сказал, что прежде чем поставить диссертацию на защиту, она должна быть прочитана на кафедре. Прочитать диссертацию он поручил Юрию Стахеевичу Барковскому. Юрий Стахеевич – одарённый математик, когда он защищал свою диссертацию, она была признана выдающейся. Месяца через три Юрий Стахеевич прочитал мою работу и за отзывом о диссертации поехал в свой родной Иркутский университет. Отзыв о диссертации от Иркутского университета дал мне заведующий кафедрой дифференциальных уравнений профессор Васильев Владимир Владимирович. Перед моим отъездом из Иркутска Владимир Владимирович пригласил меня к себе в гости. Войдя в его квартиру, обратил внимание на замечательные картины, написанные масляными красками. Владимира Владимировича знал много лет, но ничего не знал о его разносторонней одарённости, о его увлечении живописью. К моему приходу Нина Константиновна приготовила замечательный обед и мы сели за накрытый стол. У Владимира Владимировича и Нины Константиновны жила их внучка Оля, дочь их сына Олега Владимировича. Оле было лет пять, она вместе с нами сидела за столом. С Олегом Владимировичем мы вместе учились в университете, он учился курсом старше и закончил университет на год раньше меня. После окончания университета он защитил вначале кандидатскую, а затем докторскую диссертацию и разделил судьбу многих выдающихся людей, он был рано отозван из этого мира , Царствие ему Небесное и Вечная светлая память . За столом Владимир Владимирович рассказывал о старом предвоенном Иркутске и о репрессиях, которые были перед войной. Он говорил, что если арестованного ни в чём нельзя было обвинить, то его обвиняли либо в том, что он хотел взорвать Ангарский мост, либо в том, что он хотел убить депутата Гусеву (депутат Гусева была малограмотная девушка из колхоза). Когда одного из арестованных обвинили в том, что он хотел взорвать Ангарский мост, он ответил, что, конечно, хотел, но не смог, ответил, что у него не было никакой возможности осуществить это намерение, потому что была слишком большая очередь из хотевших сделать то же самое. Рассказывал Владимир Владимирович и о своих аспирантах и когда начал рассказывать о своём аспиранте из Монголии, Оля, до сих пор молчавшая, звонким голосом с детской непосредственностью внесла свои уточнения. Ольга Олеговна Васильева сейчас профессор математики одного из американских университетов.

Когда защищал диссертацию в Ростовском университете моим первым оппонентом был профессор Хрусталёв Александр

Фёдорович, а вторым – доцент Ростовского университета Александр Александрович Есипов. Председателем учёного совета был профессор Коробейник Юрий Фёдорович. Скажу несколько слов об Александре Фёдоровиче Хрусталёве. Отец у него был священником, был арестован и отправлен на строительство Беломорканала, где и закончилась его земная жизнь. Рос он без отца, но, полученное им в детстве строгое христианское воспитание и выработанная им привычка упорно трудиться, позволили ему выдержать конкурсные экзамены в Московский университет, поступить на механико-математический факультет и после окончания университета защитить докторскую диссертацию.

После защиты диссертации мне нужно было оформить документы и отправить их в ВАК. Для оформления документов нужна была пишущая машинка. Виктор Иосифович Юдович предоставил в моё распоряжение кабинет с пишущей машинкой и дал ключ от кабинета. Виктор Иосифович уже ушёл из этого мира. Глубокая благодарность и светлая память о нём живут в моей душе. Неоднократно приглашал его приехать во время летнего отпуска в Пятигорск, но, по – видимому, загруженность работой не оставляла ему времени для лечения и отдыха.

На математической конференции, проходившей в 1972 году в Майкопе познакомился с доцентом из Ростова Виктором Ивановичем Протасовым. Во время защиты диссертации жил у Виктора Ивановича. Относился он ко мне как к брату, дал ключ от своей квартиры и жил у него как у себя дома. Защищая диссертацию в Ростовском Университете, знал, что математическое отделение этого университета окончил и, кажется, с отличием , Александр Исаевич Солженицын и подумал, что может быть придёт время и Ростовский университет будет называться Ростовским государственным университетом имени А. И. Солженицына.

За свою жизнь побывал в стенах шести университетов. Конечно, прежде всего назову Иркутский университет, в стенах этого университета получал математическое образование. После окончания Иркутского университета стажировался в Московском университете. В Ростовском университете защищал диссертацию и проходил ФПК. После Иркутского университета самым близким и значимым для меня является Ростовский университет. Люди, работающие в этом университете, с которыми соприкасался, производили на меня очень хорошее впечатление. Скажу несколько слов об исключительно доброжелательном отношении ко мне Юрия Фёдоровича Коробейника. После моей защиты Юрий Фёдорович систематически присылал мне приглашения на конференции, организуемые Ростовским университетом. На конференции, проходившей в Теберде, Юрий Фёдорович попросил академика Никольского Сергея Михайловича послушать мой доклад. Прослушав мой доклад, Сергей Михайлович попросил назвать использованные источники и когда среди использованных источников назвал статью Faa de Bruno. Note sur une nouvelle formule de Calcul Differentiale, датированную 1857 годом, Сергей Михайлович удивился и спросил, как мне удалось найти эту статью. Эта статья была для меня очень важной, а найти её в библиотеках Москвы мне не удалось. Когда моя сестра Лида (Лидия Петровна Игумнова) поехала в нашу северную столицу, попросил её зайти в библиотеку им. Салтыкова – Щедрина и обратиться к работникам библиотеки с просьбой помочь найти эту статью. На поиски статьи было потрачено много времени и когда статья была найдена, моя сестра переписала её и привезла мне.

С Саратовским университетом познакомился благодаря Андрею Андреевичу Привалову. В стенах этого университета работала зимняя математическая школа, в работе которой принимали участие математики из многих крупных городов страны, много приезжало математиков из Московского университета.

Многократно принимал участие в работе конференций, проводимых Дагестанским университетом и всякий раз чувствовал исключительно доброжелательное отношение ко мне её организаторов. В Дагестане работал мой брат и, всякий раз, получив приглашение на конференцию, у меня была возможность навестить моего брата и его семью. Мой двоюродный брат Анатолий Борисович Игумнов рос без отца, тётя Лиза одна воспитывала двух сыновей Толю и Володю. Их отец и мой дядя Борис Николаевич Игумнов был убит в самом начале войны под Москвой. Толя после окончания Иркутского политехнического института работал на строительстве Чиркейской ГЭС. Летом он с семьёй приезжал к нам в Пятигорск. Он, его жена Нина Яковлевна и дети Игорь и Лариса, ещё будучи школьниками, помогали нам на даче. Проведя часть летнего отпуска в Пятигорске, мы обычно садились в его машину и ехали в Дагестан, чтобы какое-то время провести на Каспийском море. С Толей мы были очень близки, хорошо понимали друг друга. Накануне своего ухода из этого мира в конце февраля 2011 года Толя позвонил мне, по – видимому предчувствуя, что он уйдёт, и мы долго разговаривали с ним по телефону. Много сил и здоровья Толя отдал стройкам, вставал в шесть утра, приходил с работы после восьми вечера, у него была нелёгкая трудовая жизнь, Царствие ему Небесное и Вечная светлая память.

Многими своими публикациями обязан Дагестанскому университету. Приглашения на конференции, проводимые в Дагестанском университете, мне многократно присылал учёный секретарь профессор Эфендиев Ахмад Рамазанович. Особенно значимым было для меня то, что Дагестанский университет опубликовал мою первую работу, посвящённую приложениям рядов Ли.

Эта работа была опубликована благодаря профессору Гехтману Моисею Мейеровичу, давшему ей положительную оценку.

В советское время преподаватели высшей школы через каждые пять лет должны были проходить ФПК. Факультеты повышения квалификации были, по-видимому, во всех старых университетах страны и в городе, имеющем много высших учебных заведений, обычно только одно называлось университетом, остальные высшие учебные заведения назывались институтами. Трудно было попасть на ФПК в два столичных университета. Из остальных университетов можно было выбирать университет для прохождения ФПК. Для прохождения ФПК я обычно выбирал либо Ростовский университет либо Ташкентский университет. В Ташкенте жили друзья моего отца Алексей Александрович Коротков и Саттар Даньярович Гафуров. Когда проходил ФПК в Ташкентском университете, то жил в общежитии Ташкентского университета и часто бывал в гостях у Коротковых. То радушие, с которым меня принимали в семье Коротковых, незабываемо для меня и сегодня. У Алексея Александровича и Раисы Петровны был сын Саша, наш сверстник. Как и мой брат Павел, Саша учился в Иркутском медицинском институте. Сейчас уже точно не помню, учась на каком курсе, Саша перевёлся в Ташкент, где жили его родители. Диплом он получал в Ташкенте. После окончания института он служил в армии. Когда я проходил ФПК, он вернулся из армии и меня пригласили отмечать Воскресение Христово и приезд Саши. Этот замечательный день хранит моя память. Алексей Александрович рассказывал о своём детстве, проведённом в колхозе. Будучи подростком, он познакомился с тяжёлым крестьянским трудом. Незадолго до начала Великой Отечественной войны он был призван в армию и там впервые увидел белые простыни и шерстяные одеяла. Ложась после отбоя под шерстяное одеяло, он был зациклен на мысли, что добровольно отсюда уходить нельзя. Свою жизнь он связал с армией и вышел в отставку в звании майора. Алексей Александрович, Раиса Петровна, Саша и Евгения Ивановна уже ушли из этого мира, Царствие им Небесное и Вечная светлая память.

Молодые преподаватели, приехавшие на ФПК, должны были посещать занятия, немолодые, имеющие учёные степени, обычно брали индивидуальный план и занимались научной работой. Пребывание в стенах Ташкентского университета позволяло мне познакомиться с прекрасным южным городом. В книжных магазинах Ташкента был большой выбор художественной литературы, на рынках Ташкента можно было очень недорого купить совершенно замечательные узбекские фрукты, совершенно замечательные узбекские дыни.

15

В начале этого биографического очерка писал о наших знакомых Ляпустиных, с которыми мы поддерживали близкие дружеские отношения. Живя в Пятигорске, такие же близкие отношения мы поддерживали с семьёй Лузгиных. Их семья состояла из четырёх человек. У Николая Павловича и Зинаиды

Тимофеевны было двое детей: Сергей и Владимир. И Николай Павлович и Зинаида Тимофеевна были учителями математики. Николай Павлович умер когда дети были маленькими и Зинаида Тимофеевна воспитывала их одна. Своё школьное образование дети продолжили в физико-математической школе при МГУ. В эту школу принимали только талантливых детей. Чтобы определить детей в физико-математическую школу при МГУ, Зинаида Тимофеевна поехала в Москву и была принята академиком Колмогоровым Андреем Николаевичем. Дети были приняты в физико-математическую школу, поскольку были победителями математических олимпиад. После окончания с отличием механико-математического факультета МГУ, Владимир Николаевич защитил кандидатскую диссертацию. Сергей Николаевич, закончив физфак МГУ, тоже защитил кандидатскую диссертацию. Владимир Николаевич в свои юные и молодые годы получил лучшее математическое образование, которое можно было получить в нашей стране, а в нашей стране оно было и остаётся весьма высоким. Он с детства был увлечён математикой, был успешным участником математических олимпиад. Зинаида Тимофеевна мне рассказывала, что когда он, будучи школьником, вечерами слишком долго засиживался за решением задач и она просила его прекратить занятия, он отвечал: «Я отдыхаю». Его считаю одним из своих учителей математики. Увлечения математикой с детства у меня не было, в детстве мечтал стать лётчиком. После окончания школы сразу не мог решить куда подавать документы – в университет на математическое отделение или в медицинский институт.

У Владимира Николаевича в Пятигорске была однокомнатная квартира, которая находилась в нескольких минутах ходьбы от нашей квартиры, и у Владимира Николаевича бывал очень часто. Мы вместе ужинали, смотрели телевизор, слушали выступления парламентариев и проводили время за разговорами, касались проблем математики, смотрели задачи из фонда Сороса. В стране тогда началась перестройка и была допущена гласность. Заканчивая свои воспоминания о семье Лузгиных, скажу совсем немного о матери Владимира Николаевича Зинаиде Тимофеевне. Зинаида Тимофеевна была неординарной женщиной, в этом единодушны многие знавшие её люди. Она жила в Георгиевске в своём доме. Выходные и праздничные дни Владимир Николаевич обычно также проводил в Георгиевске. По большим праздникам они приглашали меня к себе в Георгиевск. Заходя в дом, сразу же чувствовал атмосферу искреннего радушия, человеческое сердце это хорошо чувствует. Всегда попадал за праздничный стол, уставленный домашней выпечкой и очень вкусно приготовленными блюдами. Никогда не уезжал от Зинаиды Тимофеевны без нагруженных продуктами сумок. Зинаида Тимофеевна рано вставала и в течении всего дня трудилась, дом содержала в идеальном порядке. Ушла она из этого мира 21 ноября 1997 года в день Архангела Михаила, проработав весь этот последний в своей жизни день. Вечером она сказала Владимиру Николаевичу, что плохо себя чувствует. Он вызвал скорую помощь и вышел встретить врача. В это время Зинаида Тимофеевна ушла из этого мира. Она много доброго сделала соприкасавшимся с ней людям и светлая память о ней хранится в душах знавших её людей , Царствие ей Небесное и Вечная светлая память . Когда отмечали 40 дней со дня её смерти, то сказал, что жизнь Зинаиды Тимофеевны была посвящена служению людям и сказал, что когда ученики спросили Христа кто из них больше, то Христос ответил**: «Вы знаете, что князья народов господствуют над ними, и вельможи властвуют ими; но между вами да не будет так: а кто хочет между вами быть большим, да будет вам слугою; и кто хочет между вами быть первым, да будет вам рабом; так – как Сын Человеческий не для того пришёл, чтобы Ему служили, но чтобы послужить и отдать душу Свою для искупления многих» (Евангелие от Матфея, гл. 20, ст. 25 – 28).**

16

В 2003 – 2004 учебном году работал в седьмом корпусе Пятигорского технологического университета на механическом факультете и на работу ездил на электричке. Утром садился на станции «Лермонтовская» на электричку, выходил на станции «Скачки» и шёл в седьмой корпус университета. Около станции «Лермонтовская» сидел бездомный и просил милостыню, у него не было одной ноги. Проходившие на электричку и с электрички люди давали ему небольшие деньги и, проходя мимо него, тоже давал ему рублей по пять и однажды, подавая ему эти мизерные деньги, спросил как его зовут. Он сказал, что зовут его Александр Алексеевич и добавил, что у него среднее техническое образование, но нет даже инвалидности. Как – то перед новым 2004 годом, увидев недалеко от бездомного милиционера, подошёл к нему и сказал, что те люди, которые совершили преступления, находятся в несравненно лучших условиях, чем этот бездомный, у них есть крыша над головой и их кормят. И спросил: «Почему же человек, который не совершил никакого преступления, находится в несравненно худших условиях, чем те, которые совершили преступления?» Милиционер мне ответил, что если этот бездомный совершит преступление, то его тоже посадят и добавил, что если вам его так жалко, то возьмите его к себе. Не смог его взять к себе, не смог поступить так, как поступили мои родители, взяв и воспитав двух сирот, как поступал Борис Климентьевич, не дорос до их уровня, не смог решиться сделать такой шаг. Этому бездомному не помог никто из проходивших мимо него людей, и он замёрз. В благополучном городе Пятигорске не нашлось ни одного человека, который бы протянул ему руку помощи. То, как поступает человек в таких ситуациях, определяет ту высоту, на которую он поднялся. Говорят, что когда начинает понижаться температура в Канаде, отцы канадских городов думают и о бездомных и полицейские получают приказ обследовать все укромные уголки, чтобы где-то кто-нибудь не замёрз. Если полицейский обнаруживает бездомного, то прежде всего он должен предложить ему отвезти его в приют. Если бездомный отказывается, то полицейский должен оставить ему спальный мешок и это делается не только из соображений гуманизма, а законы там такие, там глубже и яснее понимают и значимость человеческой личности и ценность человеческой жизни. Если в каком-то канадском городе замёрзнет бездомный, то об этом будет знать вся страна и, зная это, отцы канадских городов стараются не допустить, чтобы такое случалось. В нашей стране, по-видимому, мало кого интересует опыт по защите самых обездоленных, накопленный в других странах и не ставится задача внедрения этого опыта в нашу российскую действительность. Думаю, что если бы в нашей стране каждый работающий платил бы налог хотя бы рублей по двадцать в месяц и эти деньги бы не разворовывались, а предназначались бы для самых обездоленных, то не было бы случаев замерзания бездомных в наших городах.

17

Телеканал «Россия» при поддержке Института российской истории РАН и Фонда «Общественное мнение» в 2008 году осуществил проект «Имя Россия». В рамках этого телепроекта россияне должны были определить величайшего соотечественника за всю историю России. Претендентами были россияне, начиная от Александра Невского и кончая Лениным и Сталином. Многим великим личностям была дана действительно объективная оценка. Убедительной и объективной была, например, характеристика Петра Аркадьевича Столыпина, но не помню отметили или нет, что Пётр Аркадьевич с отличием окончил физико-математический факультет Петербургского университета. Приведу заслуживающую внимания точку зрения нашего философа Николая Александровича Бердяева на благополучие или даже сверхблагополучие, в которое погрузилась бы Россия, если бы прошли реформы Петра Аркадьевича Столыпина. Николай Александрович считает, что на этом пути Россию подстерегала бы опасность, которую можно выразить словами: «Довольство этим миром как окончательным». Относясь с большими симпатиями к этому философу, скажу, что многие высказывания Николая Александровича считаю глубокими и значимыми и некоторые помню на память. Приведу ещё два высказывания этого философа, которые хранит моя память. Ещё раз приведу замечательное высказывание Николая Александровича о совести: «Совесть есть глубина личности, где человек соприкасается с Богом». Хочу добавить, что христианское миросозерцание считает совесть светом Божиим в человеке. Многие согласятся с тем, что если у человека нет совести, то с ним нельзя иметь дело. Последнее высказывание, которое хочу привести, касается отношения тоталитарных режимов к совести: «Тоталитарный коммунизм, как и тоталитарный фашизм и национал социализм, требует отречения от религиозной и моральной совести, отречения от высшего достоинства личности, как свободного духа». Пётр Аркадьевич Столыпин был убит террористом Дмитрием Багровым и его реформы были остановлены. Далее наступает 1917 год, о котором Александр Исаевич Солженицын говорит, что может быть придёт время и мы поймём замысел Божий об октябре 1917 года.

Уже писал, что когда учился в университете, то наряду с математическими дисциплинами много внимания уделялось и общественно – политическим дисциплинам. Нас учили, что нравственным классики марксизма – ленинизма считают то, что способствует построению коммунизма. Если для человека, выбирающего свой жизненный путь, этот критерий играет ту же роль, что компас для путника, идущего через лес, то человеку, уверовавшему в эту форму нравственности, открывается возможность оправдывать в своих глазах любой, совершённый им, поступок. В рамках телепроекта «Имя Россия» и Ленину и Сталину было уделено много внимания и их деятельность оценивалась скорее положительно, чем отрицательно. Совсем другая оценка их деятельности даётся исполняющим обязанности директора Института российской истории РАН доктором исторических наук Владимиром Михайловичем Лавровым. Эта оценка приведена в четвёртой главе. Эта оценка, данная профессиональным историком, конечно, отличается от того, что говорили и писали об этих исторических деятелях двадцатого века в советское время, отличается она и от того, что говорили о них с экрана телевизора в телепроекте 2008 года. Всё о чём пишет Владимир Михайлович Лавров стало российской действительностью благодаря направлению мощи советского государства на низложение учения Христа, успехов, достигнутых в этом низложении, продуманному антирелигиозному воспитанию, изменению мировоззрения россиян.

Обращаясь к древнему источнику, написанному около двух тысяч лет назад шифрованным текстом, который называется «Откровение Святого Иоанна Богослова», хотел бы сказать, что многое из того, что пишет Иоанн Богослов в своём Откровении не понято и сегодня, в частности не понята тринадцатая глава этого Откровения. Может быть в этой главе говорится о судьбе русской земли после 1917 года и о тех, кто стал определять эту судьбу. Об этой же главе пишет Лев Николаевич Толстой в своём романе «Война и мир».

Иоанн Богослов – автор Евангелия от Иоанна, был любимым учеником Христа. Свою жизнь он закончил на уединённом острове и в конце жизни у него было продолжительное видение, в котором Бог показал Ему судьбу мира. Это видение он записал шифрованным текстом и этот текст, как уже говорилось , назван «Откровение Святого Иоанна Богослова». Когда произошла Чернобыльская трагедия, я открыл «Литературную газету» и стал читать статью об этой трагедии. Обратил внимание на то, что в этой статье утверждалось, что Чернобыльская трагедия была предсказана около двух тысяч лет назад в «Откровении Иоанна Богослова». Открыл «Откровение Иоанна Богослова» и прочитал: **«Третий Ангел вострубил, и упала с неба большая звезда, горящая подобно светильнику, и пала на третью часть рек и на источники вод. Имя сей звезде полынь; и третья часть вод сделалась полынью, и многие из людей умерли от вод, потому что они стали горькими»(Откровение Святого Иоанна Богослова, гл. 8). Хорошо известно, что чернобыль – разновидность полыни.**

С интересом смотря передачи телепроекта «Имя Россия», для себя отметил, что в этом телепроекте не было уделено внимания русской святости. Можно было бы сказать о святом Сергии Радонежском, который благословлял Дмитрия Донского на Куликовскую битву, благословлял на поединок с Телебеем монаха – богатыря Пересвета и помог России избавиться от татаро – монгольского ига. Хорошо известно, что на протяжении всей истории человечества велись кровопролитные войны, а также известны случаи, когда на помощь одной из воюющих сторон, приходили Высшие Силы. Без помощи Высших Сил Россия в начале шестисотых годов, в смутное время не смогла бы избавиться от ига польского. Обе страны и Россия и Польша назывались христианскими странами и если бы и в российской и в польской армиях было бы много людей, понимавших заповеди Христа, понимавших их значимость для человечества и соблюдавших эти заповеди, никакое кровопролитие было бы невозможно. В этом случае не было бы и вторжения со стороны Польши и России не пришлось бы принимать ответных мер и сами армии были бы ненужными.

Сергий Радонежский позаботился о России и более чем через двести лет после своей смерти. О том как в смутное время он пришёл на помощь России повествуют следующие строки: «Преподобный Сергий явился во сне городскому голове, торговавшему мясом, - Кузьме Минину Сухорукому, - и велел ему собирать казну, войско и идти освобождать Русскую землю. Кузьма Минин пришёл в страх и недоумение и не знал, что ему делать. Трижды являлся ему преподобный Сергий и наконец сказал ему: ”Не говорил ли я тебе, чтобы ты собирал ратных людей? Милосердному Господу угодно было помиловать православных христиан, избавить их от волнения и даровать им мир и тишину. Посему и я сказал тебе, чтобы ты шёл на освобождение земли Русской от врагов. Не бойся, что старшие не пойдут за тобой, - младшие охотно исполнят это, и благое дело будет иметь добрый конец”. Тогда, испросив у преподобного прощения, Кузьма ревностно принялся за дело и обратился с воззванием к своим согражданам. Особенно горячо отозвалась молодёжь. Кузьма первый пожертвовал своё имущество, другие присоединились к нему, и он собрал воинство, а начальство над ним принял воевода князь Дмитрий Михайлович Пожарский. И Кузьма Минин, как выборный от земли Русской, вместе с ним пошёл освобождать Москву, а с нею и всю землю Русскую от врагов. И враги были побеждены заступничеством Божией Матери и молитвами преподобного Сергия, до наших дней не перестающего подавать помощь всем, с верою прибегающим к нему». (См. Конев А. Ф. 100 пророчеств о судьбах России. Изд. Современный Литератор. Минск, 2003).

Мало кому знакомо имя Святого Князя Михаила Черниговского, а он заслуживает того, чтобы о нём помнили россияне. О Михаиле Черниговском Иван Алексеевич Бунин пишет, что он шёл в орду для России, но и для неё не согласился поклониться идолам в ханской ставке, а избрал мученическую смерть.

Можно было хотя бы упомянуть патриарха Тихона, хотя бы немного сказать о Святой Великомученице Елизавете Фёдоровне. Патриарх Тихон в своём послании от 7 ноября 1918 года писал: «Кровь наших братьев, безжалостно убиенных по твоему приказу, образует реки и вопиет к небу… Безразлично, каким бы именем ты свои злодеяния не приукрашивал, - убийство, насилие, грабёж всегда останутся грехами, они преступления, которые кричат о мщении. Ты обещал свободу – свобода есть великое благо, если её правильно понимать как свободу от зла и свободу от угнетения. Ты, однако, не дал нам этой свободы. Ты использовал свою власть для преследования твоих ближних и для уничтожения невиновных. Вот истина: ты дал народу камни вместо хлеба и змею вместо рыбы. Слова пророков сбылись: «Ваши ноги шагают ко злу, и они спешат, чтобы пролить невинную кровь; ваши идеи несправедливы, ваша дорога ведет к гибели и вреду…». А в своём пророческом послании от 8 октября 1919 года патриарх Тихон утверждает: «Никакое иноземное вмешательство, да и вообще никто и ничто, не спасёт России от нестроения и разрухи, пока Правосудный Господь не преложит гнева Своего на милосердие, пока сам народ не очистится в купели покаяния от многолетних язв своих, а через то не возродится духовно». Когда патриарху Тихону хотели помочь бежать из Советской России, он ответил: «С креста не сходят, с креста снимают».

Об Елизавете Фёдоровне Любовь Миллер написала документальную книгу «Святая мученица Российская Великая княгиня Елизавета Фёдоровна», Паломник, М.,2006 г. Елизавета Фёдоровна была сестрой императрицы Александры Фёдоровны и была замужем за Великим князем Сергеем Александровичем. Когда 18 февраля 1905 года террорист Коляев бросил бомбу в её мужа, Елизавета Фёдоровна его тело собирала по кускам. Затем она идёт в тюрьму к Коляеву, просит Коляева раскаяться в совершённом им страшном преступлении и говорит ему, что будет просить царя, чтобы царь сохранил ему жизнь. Об этом Любовь Миллер пишет так: « Через два дня после убийства супруга, молясь у его гроба, Великая княгиня почувствовала, что душа покойного от неё чего – то просит. Она догадалась, что Сергей Александрович направляет её к убийце Коляеву, чтобы передать ему своё прощение. Тогда Елизавета Фёдоровна на третий день после трагической смерти мужа поехала в тюрьму, где содержался убийца Великого князя Коляев. Сама Елизавета Фёдоровна не испытывала ненависти к тому, кто своей страшной рукой разрушил её счастье. Она жалела Коляева, жалела его заблудшую душу. Она хотела, чтобы он раскаялся в своём ужасном преступлении и просил у Господа прощения. Эти нравственная сила Великой княгини, величие её духа, которые она проявила, чтобы встретиться лицом к лицу с убийцей Сергея Александровича, поразили всех. Елизавета Фёдоровна была такой всю свою жизнь. Жертвуя собой, забывая о себе, она думала только о других. (Это её чувство было проявлено и в отношении умирающего кучера Андрея.) Великий князь Александр Михайлович в «Книге воспоминаний» на с. 138 писал; «Не поза или рисовка, а искреннее милосердие побудили её навестить убийцу её мужа в его камере». Елизавете Фёдоровна желала, чтобы её визит в тюрьму к Коляеву остался тайной. Она не хотела, чтобы знали об этом люди, и очень была огорчена, когда вся Москва, а за ней и Петербург заговорили об этом. В книге протопресвитера М. Польского «Новые мученики Российские» 1-го тома на с. 268 описывается это свидание: «Когда он увидел её… он спросил: «Кто вы?» Я его вдова, - ответила она, - почему вы его убили? «Я не хотел убивать вас, - сказал он, - я видел его несколько раз в то время, когда имел бомбу наготове, но вы были с ним, и я не решился его тронуть». «И вы не сообразили того, что вы меня убили вместе с ним?» - ответила она…». Далее Елизавета Фёдоровна сказала преступнику, что принесла ему прощение от Сергея Александровича. Она говорила ему об ужасе его греха и просила его покаяться; в руках она держала святое Евангелие и умоляла Коляева прочитать его, но он отказался. Великая княгиня сказала: «Если вы покаетесь, я попрошу Императора вас помиловать, и я буду молить Господа, чтобы Он простил вас, а я уже вас простила…». Но Коляев отказался покаяться в своём грехе убийства. Всё же Елизавета Фёдоровна оставила святое Евангелие и маленькую иконку на столе в камере преступника, надеясь, что он передумает и обратится к Богу».Далее Любовь Миллер продолжает: «Великая княгиня написала прошение на Высочайшее имя, прося Государя помиловать Ивана Коляева. Слухи о посещении Елизаветой Фёдоровной убийцы супруга преувеличивались и распространялись везде. Но общественное мнение сводилось к тому, что Коляев согласится просить Императора о помиловании. Эти слухи проникли и в тюрьму убийцы, который не замедлил написать великой княгине оскорбительное письмо: «Я не говорил Вам, что я сожалею о том, что я сделал. Но Вы воспользовались моим положением. Если я согласился выслушать Вас, то это только потому, что я смотрю на Вас как на несчастную вдову человека, которого я убил. Мне было жаль Вас в вашем горе, и это всё. То, что Вы рассказываете о нашем разговоре, - это для меня оскорбление. Я не хочу помилования, которое Вы просите для меня…». Для Елизаветы Фёдоровны это письмо было ударом. Она никому не рассказывала о своём разговоре с Коляевым». Коляев, не понимая, что тем, кто направлял его действия, он нужен был только как исполнитель, хотел, чтобы в освобождённой от царизма России свято чтилось его имя. После убийства Сергея Александровича Елизавета Фёдоровна продаёт всё, что имела и на полученные деньги создаёт Марфо-Мариинскую обитель труда и милосердия. Наступил 1917 год, и к власти пришло Временное правительство, Россия в это время находилась в состоянии войны с Германией. Далее Любовь Миллер пишет о том, как Елизавета Фёдоровна отвергала представлявшиеся ей возможности уехать из России: «Сильное искушение постигло её, когда в начале лета 1917года приехал специально в Москву, чтобы встретиться с ней, шведский министр. Он хотел уговорить Великую княгиню покинуть Россию и уехать за границу. Он приехал по поручению кайзера Вильгельма, который хотел спасти Елизавету Фёдоровну, в которую когда-то был влюблён. Кайзер работал над разрушением России, и фатальным его актом было то, что он заслал Ленина и его соратников в Россию. Он знал, что Временное правительство скоро падёт и Россия захлебнётся в крови невинных жертв. Об этом кайзер дал ясный намёк шведскому министру. Выслушав внимательно все доводы министра, Великая княгиня спросила его о судьбе Императора с семьёй. Шведский министр искренне ответил, что будет сделано всё возможное, чтобы они тоже выехали за границу. Наступила небольшая пауза. Вероятно, в этот момент Елизавета Фёдоровна горячо молилась Богу и боролась с сильным искушением уехать из России к своим родным. И она поборола его. Раз приняв решение, она не меняла его. Она тепло поблагодарила министра за заботу о ней и совершенно спокойно сказала, что не может оставить свою обитель и вверенных ей Богом сестёр и больных и что она определённо решила остаться здесь. Затем Великая княгиня встала, показав этим, что разговор окончен. Шведский министр понял, что никакие дальнейшие уговоры не смогут повлиять на Елизавету Фёдоровну, и молча, поклонившись, вышел из приёмной обители». Далее Любовь Миллер пишет о том, как Елизавета Фёдоровна отвергла последний шанс спасти свою жизнь: «После заключения постыдного Брест – Литовского мира немецкое правительство в лице графа Мирбаха добилось согласия советской власти на вывоз Великой княгини Елизаветы Фёдоровны за границу. Но она категорически отказалась уехать из России. Она говорила: «Я никому ничего дурного не сделала. Буди воля Господня!» Граф Мирбах два раза добивался приёма у Великой княгини, но она не приняла его, как представителя Германии, вражеской страны. Это был последний шанс на спасение, от которого стойко отказалась Елизавета Фёдоровна». Елизавета Фёдоровна не могла простить кайзеру Вильгельму засылку Ленина в Россию, того, что он сделал для разорения России, и не считала возможным, чтобы он был спасителем её жизни. Она также считала, что не может спасать свою жизнь, оставив сестёр обители и больных, лежащих в больнице, за которыми она ухаживала и поэтому не считала возможным принять графа Мирбаха. Елизавету Фёдоровну и её келейницу Варвару вместе с другими узниками сбросили живыми в Алапаевске в отработанную шахту. Варвара сразу же разбилась, Елизавета Фёдоровна сразу не разбилась, и продолжительное время оставалась живой. Жестокость этого преступления можно сравнить разве лишь с жестокостью, с которой уничтожали ранних христиан на аренах римских цирков. Временам раннего христианства посвящён роман «Камо грядеши» польского писателя Генриха Сенкевича. На аренах римских цирков первохристиан разрывали львы, тигры и другие дикие звери. Перед представлениями зверей морили голодом. Ранние христиане отказывались спасти свою жизнь путём отречения от Христа и гибли на аренах римских цирков. В «Новом Завете» есть такие слова Христа**: «Вы слышали, что сказано: «око за око, и зуб за зуб». А Я говорю вам: не противиться злому» (Евангелие от Матфея, гл. 5, ст. 38-39). Словам Христа «А Я говорю вам: не противиться злому»** непросто следовать . По двум причинам ранние христиане не оказывали сопротивления: причина первая – непоколебимо верили словам своего Великого Учителя и не сомневались, что Бог, создавший Миры и Вселенные, Сам воздаст их палачам; причина вторая – считали недопустимым проливать кровь своих палачей и тем самым опускаться до их уровня. Смертным трудно даётся понимание того, что если люди на зло отвечают ещё большим злом, то они создают новые звенья цепи, опоясывающей всю историю человечества, звеньями этими являются войны, преступления, злодеяния. Кровь, пролитая первохристианами на аренах римских цирков, не была напрасно пролита. Христианскими странами стали страны Европы, Америки, христианской страной стала Россия.

Келейнице Елизаветы Фёдоровны Варваре чекисты предлагали оставить Елизавету Фёдоровну и быть свободной. Варвара считала недопустимым оставить Елизавету Фёдоровну в самую трудную минуту её жизни и сознательно выбрала мученическую смерть. Величие её души не подлежит сомнению. Думаю, что и в мыслях для Варвары был недопустимым путь приспособления, путь комсомола, членство в партии, - путь, которым пошли миллионы советских людей.

Вскоре после того как Елизавета Фёдоровна, Варвара и другие узники были живыми сброшены в отработанную шахту, армия Колчака заняла Алапаевск и тела Варвары, Елизаветы Фёдоровны и остальных узников были извлечены из шахты. Будучи молодой немецкой принцессой, Елизавета Фёдоровна посещала Иерусалим и там проронила слова: «Хотела бы быть здесь похороненной». Александр Васильевич Колчак знал об этих словах и гроб с её телом и гроб с телом её келейницы Варвары отправил в Иерусалим. Там они похоронены и причислены к лику святых.

Остаточные представители русской святости встречались и в наше время. Когда мы жили в Иркутске, в Иркутске жила Ксения Ивановна Мошарова, она работала в больнице медицинской сестрой. Ксения Ивановна брала к себе одиноких, совершенно беспомощных больных, ухаживала за ними и тратила на них свою скудную зарплату. Её можно назвать русской матерью Терезой. Когда она умерла и её отпевали в Знаменском соборе города Иркутска, то собор был заполнен людьми. Такой же была и её младшая сестра Софья Ивановна, у которой я останавливался в Москве после смерти Бориса Климентьевича. Ксению Ивановну и Софью Ивановну считаю остаточными представителями русской святости, которая была на Руси. Для Ксении Ивановны, её младшей сестры Софьи Ивановны и других неординарных людей, о которых писал на страницах этого биографического очерка, учение Христа было не теоретическим догматом, оно ими воплощалось в жизнь. Святость на Руси действительно была. О пророческом гении России Авеле говорится в четвёртой главе . Скажу ещё об одном менее чем Авель известном провидце. В 1717 году в разгар реформ Петра Первого один монах написал трактат, где говорилось о том, что в Россию пришёл антихрист. Свой трактат он дал прочитать настоятелю монастыря. Настоятель, прочитав трактат, сказал автору, что ты, брат, ошибаешься и сказал, что это его предтеча, а настоящий придёт через 200 лет. Этот трактат попал в руки Петра Первого и Пётр Первый, прочитав его, приговорил и автора трактата и настоятеля монастыря к смертной казни через колесование. Если не ошибаюсь, у Владимира Семёновича Высоцкого есть такие слова: «Ясновидцев и провидцев всегда сжигали люди на кострах».

18

В нашей повседневной жизни с каждым годом всё большую роль начинает играть компьютер. У истоков тех достижений, результатами которых мы пользуемся сегодня, стоял Норберт Винер (1894 – 1964). Скажу хотя бы немного об этом замечательном всемирно известном американском математике. Норберт Винер родился в США в штате Миссури. К 14 годам он получил высшее математическое образование. Получив высшее математическое образование, он стал работать в области математической логики и в 18 лет стал доктором философии Гарвардского университета. Норбет Винер знал десять языков. Своё математическое образование он продолжал в Кембридже и Геттенгене. В послевоенные годы (1945 – 1947), изучая процессы, протекающие в электрических и электронных системах и процессы, протекающие в живых организмах, он обратил внимание на аналогии. Это позволило ему создать новую науку кибернетику, науку об управлении. В 1948 году в Париже вышла его книга «Кибернетика». Думаю, что без убеждённости Винера в том, что мир управляется Богом, что животные и птицы живут по программам, заложенных в них Творцом, к созданию кибернетики было бы прийти трудно, а может быть, и невозможно.

Этому биографическому очерку предпослал эпиграф, в котором говорится о любви и закончить этот очерк мне хотелось бы словами Апостола Павла о любви. Говоря о любви, Апостол Павел говорит как бы и о компьютере. Он говорит о сверх возможностях, о владении языками человеческими и ангельскими, о могуществе, которое позволяет и горы передвигать. Горы компьютер, конечно, передвигать не может, но, например, передавать информацию за тысячи километров, может почти мгновенно. В Библии говорится, что Бог создал человека по образу и подобию Своему. Компьютер создан человеком и постоянно совершенствуется, но при всём своём совершенстве, компьютер не обладает тем, чем обладает человек. В человеке есть Божественное начало, в компьютере этого начала нет. Человек создан Богом, компьютер создан человеком. Все возможности, которыми располагает компьютер, его память, его логика, всё это введено в него человеком. У компьютера нет сердца, он не способен чувствовать. То, что в у него нет совести настолько очевидно, что может быть не нужно было бы об этом и упоминать. Совесть, согласно христианскому миросозерцанию является Светом Божиим в человеке, это его Божественное Наследие. У компьютера нет любви, он может обеспечить доступ к эротике, но её нельзя называть любовью. С этим согласится каждый, кто читал «Гранатовый браслет» у Александра Ивановича Куприна. Любовь чувство очень высокое, некоторые считают, что не земное, не здешнее. О любви Апостол Павел говорит так**: «Если я говорю языками человеческими и ангельскими, а любви не имею, то я – медь звенящая или кимвал звучащий. Если имею *дар* пророчества, и знаю все тайны, и имею всякое познание и всю веру, так что *могу* и горы переставлять, а не имею любви, то я ничто. И если я раздам всё имение мое и отдам тело мое на сожжение, а любви не имею, — нет мне *в том* никакой пользы. Любовь долготерпит, милосердствует, любовь не завидует, любовь не превозносится, не гордится, не бесчинствует, не ищет своего, не раздражается, не мыслит зла, не радуется неправде, а сорадуется истине; все покрывает, всему верит, всего надеется, все переносит. Любовь никогда не перестает, хотя и пророчества прекратятся, и языки умолкнут, и знание упразднится» (Новый Завет. Первое послание к Коринфянам святого Апостола Павла, гл. 13, ст. 1 – 8).**

Литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. 1987.
2. Белоносов С.М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Издательство Сибирского отделения АН СССР. Новосибирск, 1962.
3. Бельтюков Б.А. Аналог метода Рунге-Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Дифференциальные уравнения, т. 1, №4, 1965.
4. Бельтюков Б.А. Применение незамкнутых квадратурных формул к численному решению нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Труды научного объединения преподавателей физико-математических факультетов педагогических институтов Дальнего Востока, т.5 (математика), 1965.
5. Бельтюков Б.А. К решению нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра методом Пикара. Труды Иркутского гос. университета, серия математическая, вып.26, 1965.
6. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1957.
7. Быков Я.В. О периодических решениях одного класса уравнений в конечных разностях. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Издательство Академии наук Киргизской ССР. Фрунзе, 1982.
8. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. Москва, 1965.
9. Вайнберг М.М. Нелинейные интегральные уравнения (современное состояние и перспективы). Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т.2, Москва, 1956.
10. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Издательства «Наука». Москва, 1969.
11. Головачик П.И. Построение малых решений одного класса нелинейных уравнений с двумя параметрами. Иркутск, 1970.
12. Грудо Э.И. Об одном интегральном уравнении Вольтерра. Дифференциальные уравнения, т.1, №2, 1965.
13. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Издательства «Наука». Москва, 1977.

14. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Издательства «Наука». Москва, 1977.
15. Филатов А.Н. Известия АН УзССР, серия физико-математических наук, №6, 1961.
16. Филатов А.Н. О применении рядов Ли к задачам механики. Симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев, сентябрь, 1961.
17. Филатов А.Н. Журнал вычислительной матьематики и математической физики, том 2, №3, 1962.
18. Филатов А.Н. Многомерные обобщенные ряды Ли и их свойства. В сборнике научно-исследовательских работ ТТИ, вып. 15, Ташкент, 1962.
19. Филатов А.Н. Обобщенные ряды Ли и их приложения, Ташкент, 1963.
20. Филатов А.Н. О некоторых классах операторных рядов и их применении. Вопросы вычислительной математики. Выпуск 4. Ташкент, 1964.
21. Бондаренко Б.А., Филатов А.Н. Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости. Ташкент, 1978.
22. М. Холл. Комбинаторика. Москва, 1967.
23. Шварц Л. Анализ. Том 1. Москва, 1972.
24. Юдович В.И. Лекции об уравнениях математической физики. Часть 1. Ростов-на-Дону, 1998.
25. Игумнов В.П. К вопросу о решении одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра (2стр.). Труды конференции Иркутского пед. института. Иркутск, 1965.
26. Игумнов В.П. Исследование одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с переменным верхним пределом (1стр.). Труды конференции Иркутского пед. института. Иркутск, 1967.
27. Игумнов В.П. Некоторые результаты о целых неотрицательных решениях уравнения $x_1+2x_2+\ldots+nx_n=n$. Математика и её приложения . Вып. 1. Ставрополь, 1973.
28. Игумнов В.П. Модификация метода решения функциональных уравнений с помощью рядов. Математика и её приложения. Вып. 1. Ставрополь, 1073.
29. Игумнов В.П. Теорема о дифференцировании суперпозиции функций нескольких переменных. Математика и её приложения. Ростов на Дону, 1973.

30. Игумнов В.П. К вопросу о числе целых неотрицательных решений уравнения $x_1+2x_2+\ldots+nx_n=n$. Математика и её приложения. Ростов на Дону, 1973.
31. Игумнов В.П. О вычислении коэффициентов рядов Ли при решении дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра. Функциональный анализ. Межвузовский сборник, вып. 5, ч. 1. Махачкала, 1976.
32. Игумнов В.П. О применении рядов Ли к обыкновенным дифференциальным уравнениям и интегральным уравнениям типа Вольтерра. Изд. МГПИ.Матем. физика. Сборник трудов. Вып. 5. Москва, 1978.
33. Игумнов В.П. О представлении решений нелинейных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений типа Вольтерра в виде рядов Ли. Дискретные и распределённые системы. Изд. Иркутского университета. Иркутск, 1981.
34. Игумнов В.П. О применении метода рядов Ли к нелинейным интегральным уравнениям типа Вольтерра. Приближённые методы решения операторных уравнений. Изд. АН СССР. Сибирское отделение. Иркутск, 1982.
35. Игумнов В.П. Представление решений дифференциальных уравнений модифицированными рядами Ли. Дифференциальные уравнения, 1984, том 20, №6.
36. Igumnov V. P. Representation of solutions of differential equations by modified Lie series. Differential equations. December, 1984, p. 683 – 688. Translated from Russian, $\frac{c}{b}$ consultants bureau, New York.
37. Игумнов В.П. О представлении решений обыкновенных дифференциальных уравнений в виде рядов Ли (совместно с Гвоздецким О. М.). Украинский математический журнал, 1986, том 38, №2.
38. Игумнов В.П. О представлении решения интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра в виде ряда Ли. Теория функций и приложения. Труды 2-й Саратовской зимней школы. Изд. Саратовского университета. Саратов, 1986.
39. Игумнов В.П. О вычислении коэффициентов рядов Ли при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения, 1987, том 23, № 10.
40. Игумнов В.П. О приложении многомерного обобщения теоремы де Бруно к отысканию решения задачи Коши в виде рядов Ли. Теория функций и приложения. Труды 3-й

Саратовской зимней школы. Изд. Саратовского университета. Саратов, 1987.
41. Игумнов В.П. О вычислении коэффициентов рядов Ли при решении интегро-дифференциальных уравнений. Тезисы докладов 2-й Северо-Кавказской региональной конференции. Изд. Дагестанского университета. Махачкала, 1988.
42. Игумнов В.П. О представлении решений дифференциальных уравнений в виде рядов Ли и о вычислении коэффициентов этих рядов. Седьмая Всесоюзная конференция «Качественная теория дифференциальных уравнений». Тезисы докладов. Изд. Академии наук Латвийской ССР. Рига, 1989.
43. Игумнов В.П. О построении решений системы интегро-дифференциальных уравнений в виде рядов Ли. Украинский математический журнал, 1989, том 41, №3.
44. Игумнов В.П. О представлении решений интегро-дифференциальных уравнений рядами Ли. Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Изд. Академии наук СССР. Владивосток, 1990.
45. Игумнов В.П. О представлении решений автономных систем дифференциальных уравнений рядами Ли и о задаче вычисления коэффициентов этих рядов. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов 3-й Северокавказской региональной конференции. Изд. Дагестанского университета. Махачкала. 1991.
46. Игумнов В.П. О представлении решения задачи Коши рядами Ли. Седьмая международная конференция. Математика, экология, образование. Международный симпозиум. Ряды Фурье и их приложения. Тезисы докладов. Ростов на Дону, 1999.
47. Игумнов В.П. Вычисление коэффициентов рядов Ли при решении автономных систем дифференциальных уравнений. Труды российской ассоциации «Женщины – математики». Математика, экономика, экология, образование. Ряды Фурье и их приложения. Том 7, выпуск 1. Чебоксары, 2000.
48. Игумнов В.П. Об исследовании интегро – дифференциальных уравнений с помощью рядов Ли. Еругинские чтения – VII. Тезисы докладов Международной математической конференции. Гродно, 2001.
49. Игумнов В.П. О применении рядов Ли при решении задач теории дифференциальных уравнений и о некоторых других приложениях этих рядов (совместно с Игумновой Л.

А.). Научные труды. Дни науки, № 29 часть II. Пятигорский государственный технологический университет. Пятигорск, 2006.

50. Игумнов В.П. О некоторых приложениях рядов Ли (совместно с Игумновой Л. А.). Функционально – дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы третьей Международной научной конференции, 24 – 27 сентября 2007 г. Федеральное агентство по образованию, Дагестанский государственный университет. Махачкала, 2007.

51. Игумнов В.П. О рядах Ли и представлении ими решений дифференциальных уравнений. Прикладные задачи математики и механики. Материалы XIX Международной научно – технической конференции. Севастополь, 12 – 16 сентября 2011 г. Міністертво освіти і науки, молоди та спорту Украіни. Севастопольский національний технічний університет (СевНТУ). Севастополь, 2011.

52. Игумнов В.П. Ряды Ли и вычисление их коэффициентов (совместно с Игумновой Л. А.). Функционально – дифференциальные уравнения и их приложения. Материалы V Международной научной конференции, посвящённой 80 – летию Дагестанского государственного университета, 26 – 29 сентября 2011 г. Министерство образования и науки Российской Федерации. Дагестанский государственный университет. Махачкала, 2011.

53. Игумнов В.П. О рядах Ли, их приложениях и вычислении коэффициентов этих рядов при решении дифференциальных уравнений. Материалы Международной молодёжной научной конференции «Математическая физика и её приложения» (МФП – 2012) в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно – педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». (В пяти томах). Том первый - общие вопросы математической физики (28 – 30 июня 2012 года). Пятигорск, 2012.

54. Микаелян И. И. Задачи студенческих математических олимпиад с решениями -1 + 9 + 32 + . . . + 800 =? Под редакцией, с предисловием и биографическим очерком доцента Игумнова В. П.(263 стр.). Пятигорск, 2012. (Мною написана вторая глава этого учебного пособия, содержащая указания к решению задач).

55. Игумнов В.П. Об истинах математики и других бесспорных истинах. Сборник научных трудов 2–й ежегодной научно–практической конференции преподавателей, студентов и молодых учёных СКФУ.

«Университетская наука – региону). Том I (7 – 28 апреля 2014 года). Изд. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо– Кавказский федеральный университет» (филиал в г. Пятигорске). Пятигорск, 2014.
56. Игумнов В.П. О разбиении натурального числа и задаче дифференцирования суперпозиции функций. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения (совместно с Игумновой Л.А.) Материалы VII Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Магомедова Г.А. Дагестанский государственный университет. Махачкала, 2015.
57. Игумнов В.П. О мощности множества, об использовании этого понятия для характеристики человеческой личности и о реалиях нашей жизни. Сборник научных трудов IV-ой ежегодной научно-практической конференции преподавателей, студентов и молодых ученых СКФУ (12-22 апреля 2016 года). Изд. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо– Кавказский федеральный университет» (филиал в г. Пятигорске). Пятигорск, 2016.
58. Bruno Faa de, Note sur une nouvelle Formule de Calcul Differentiel. The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, London, 1857, v.1, p. 359.
59. Cap F, Floriani D., GrÖbner, W, Schett A. and Weil. Solution of ordinary differential equations by means of Lie Series. NaSa Contractor Ropor CR-552, Washington, D.C., 1966.
60. Cap F. and Mennig J. Analytical method for determining n-group neutron fluxes in cylindrical shielding problem using Lie Series, Nucleonic 6 (1964), 141-147.
61. GrÖbner, W. Uber die Parameterdarstellungen algebraischer Mannigfaltigkeiten mittels Liescher Reihen, Math. Nachr. 18 (1958), 360-375.
62. GrÖbner, W. Kontinuierliche Transformations-gruppen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten. Mh. f. Math., 61 (1958), 209-224.
63. GrÖbner, W. Die Darstellung der LÖsungen eines Systems von Differentialgleichungen durch Liesche Reihen. Arch. Math. 9 (1058), 82-93.
64. GrÖbner, W. Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie Rend, Accad. Naz. Lincec, Cl. Sci. fis., mat. Natur., Serie VIII, 24 (1958), 11-15.

65. GrÖbner, W. and F. Cap. Perturbation theory of celestial mechanics using Lie-Series, XI-th Jntern. Astronaut. Congress Stockholm, 1960, 348-350.
66. GrÖbner, W. Applicationi delle serie di Lie nella geometria algebrica. Atti Convegno Internaz. Geometria Argebrica, Atti Converno Internaz. Geometria Algebrica, 24-27, maggio 1961, Torino, 165-174.
67. GrÖbner, W. LÖsung der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mittels Lie-Reihen, Mh. Math. 68 (1964), 113-124.
68. GrÖbner, W. Die Lie-Reihe und ihre Anwendungen (zweite Auflage), Berlin, 1967.
69. Hardy G.H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatorial analysis. Proc. Lond. Math. Soc., (2), 17 (1918), 75-115.
70. Horn J. Uber eine nicht lineare volterrasche Integralgleichung. Iahresbericht d.D. Math.-Ver., 23, 1914.
71. Knapp H. Uber eine Verallgemeinerung des Verfahrens der sukzessiven Approximation zur LÖzung von Differentialgleichungssysthemen. Mh. Math., 68 (1964), 33-45.
72. Maess J. Zur Bestimmung des Restgliedes von Lie-Reihen. Wiss. Z. Fridrich-Schiller-Univ. Jena. Math-natur. Reihe 14 (1965), 423-425.
73. Maess J. Quantitative Verfahren zur Bestimmung periodischen LÖzungen autonomer nichtlinearer Differentialgleichungen. Abh. Dtsch. Akad. Wiss., Kl. f. Math., Heft 3, 1965.
74. Lie S., Theorie Transformationsgruppen, 1. Abschnitt, B.J. Teubner, Leipzig, 1888
75. Noble B. The numerical solution of nonlinear integral equations and related topics. “Nonlinear Integral Equations”, Madison, Univ. Wisc. Press, 1964, 215-318.
76. Sato T. Journal of the Mathematical Society of Japan, vol. 5, №2б July, 1953.
77. Watzlawek W. Uber die LÖsung des Cauchyschen Problems bei linearen partiellen Differentialgleichungen belibiger Ordnung mittels Lie Reihen, Mh. Math. 70 (1966), 366-376.

Оглавление

О задаче разбиения натурального числа и задаче вычисления коэффициентов рядов Ли при решении дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.

С биографическим очерком первого автора.

Авторы:
Игумнов Василько Петрович и
Игумнова Лариса Анатольевна.

Авторское издание.

Подписано к печати 10.10.2018г. Бумага офсетная.
Усл. п. лист. 74/4. Печать офсетная. Заказ 56.
Отпечатано в типографии ПА "МАРТ".
г. Пятигорск, ул. 1-я Бульварная, 10. E-mail: pamart@mail.ru
Тираж 100 экз.